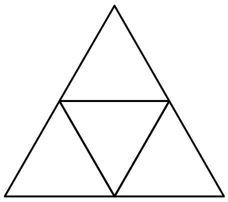
$\boxed{1}$ 一辺の長さが 1 の正三角形の内部または周上に 5 個の点をとる。

このとき，ある 2 点の距離は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

解説

正三角形を図のように 4 つの部分に分けると，
鳩ノ巣原理より
いずれかの三角形は 2 つ以上の点を含む。
その 2 点間の距離は $\dfrac{1}{2}$ 以下。



$\boxed{2}$ 【JMO 1991 予選】

△ ABC の重心をGとする。

GA $= 2\sqrt{3}$，GB $= 2\sqrt{2}$，GC＝ 2 のとき △ ABC の面積を求めよ。

解説

辺 BC と直線 AG の交点を M とする。

AG : GM = 2 : 1 より△ ABC : △ GBC = 3 : 1

ここで，直線 AG 上に MG = MD となるG と異なる点を D をとる。

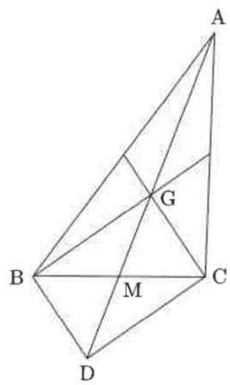
GM = MD，BM = MC，∠BMG = ∠CMD より，

△ GBM≡ △ DCM

よって，△ GBC = △ GDC となる。

△ GDC の各辺はGD = GA = $2\sqrt{3}$，GC＝ 2，CD = GB = $2\sqrt{2}$

$GD^2 = GC^2 + CD^2$ が成り立つので，△ GCD は直角三角形。

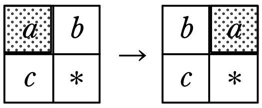


△ GBC = △ GCD = $\dfrac{1}{2}(GC \times CD) = 2\sqrt{2}$

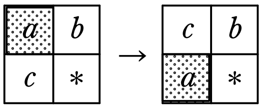
∴ △ ABC = $3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

3 相異なる整数が書き込まれている $n\times n$ マスの方陣の a が書かれているマスに対して，右隣のマスに書かれている数 b と，真下のマスに書かれている数 c を比べ，次の [1] ～ [3] のいずれかの操作を行うことを, a に対するスライドと呼ぶことにする。

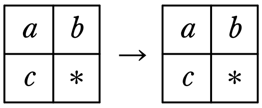
[1]　a, b, c の最大値が b のとき, a と b を入れ替える。



[2]　a, b, c の最大値が c のとき, a と c を入れ替える。



[3]　a, b, c の最大値が a のとき, 数の入れ替えは行わない。



いま, $n\times n$ マスの方陣に 0 から n^2-1 までの数を 1 つずつ書き込み，1 番左上に書かれている数に対するスライドを次々と行うことを考える。

1 番左上に $(n-1)^2$ が書き込まれているとき, $(n-1)^2$ に対するスライドの操作を, 操作が行えなくなるまで次々と行った結果, $(n-1)^2$ が 1 番右下まで来るような数の配置は何通りあるか。

解説

$n\times n$ マスの方陣に対して, $(n-1)^2$ が右下へ行くためには, 右に $n-1$ 回, 下に $n-1$ 回入れ替えが起こる必要がある。 よって, n^2-1 以下で, $(n-1)^2$ より大きい $2n-2$ 個の整数が, 1 番左上のマス目から, 1 番右下のマス目まで繋がって配置されている必要がある。

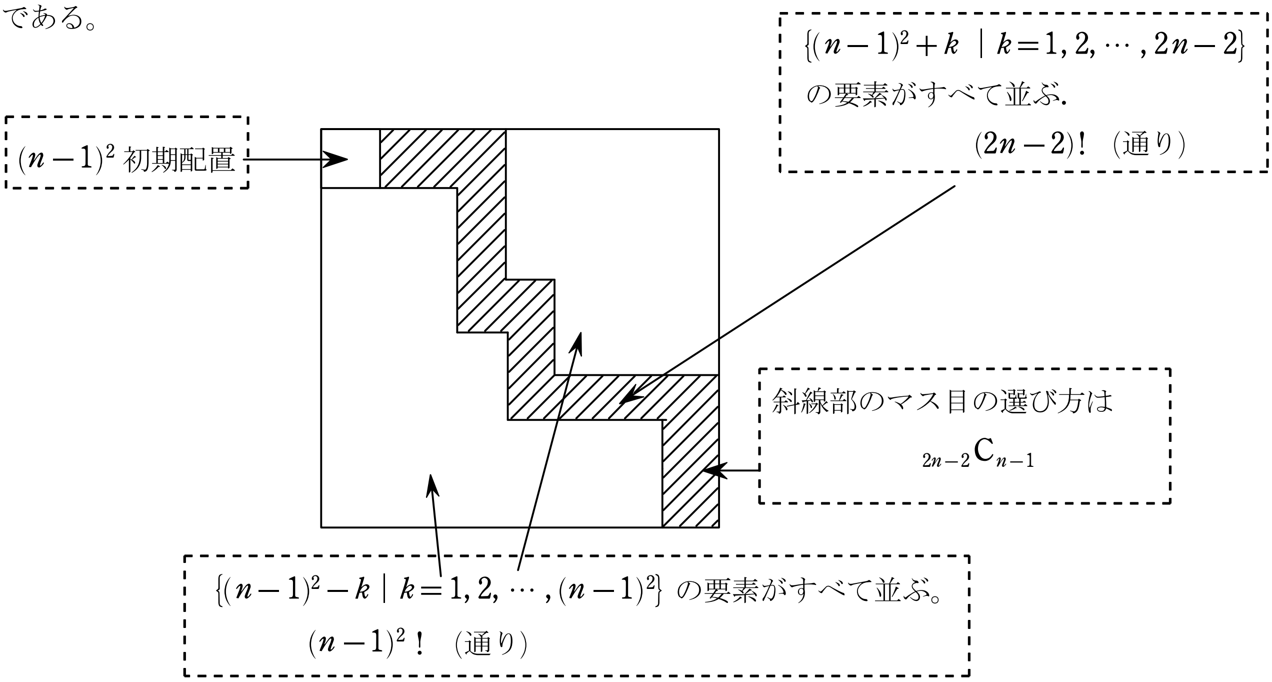
ここで n^2-1 以下で, $(n-1)^2$ より大きい $2n-2$ 個の整数は,

$$(n-1)^2+1\ , (n-1)^2+2\ , \cdots , n^2-2, n^2-1$$

であるので, これらの数が条件を満たすように配置される場合の数は

$$ {}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}(2n-2)!(n-1)^2! $$

である。



$\boxed{4}$ 【Hungary1995】

あるいくつかの素数の積は，それらの和の10倍である。

そのような素数の組をすべて求めよ。（すべてが異なっている必要は無い。）

解説

求める素数の組 $(p_1, p_2, ..., p_n)$ のうちいずれかは2と5でなくてはならない。 $p_1=2$ ， $p_2=5$ とする。

このとき　$p_3+\cdots+p_n+7=p_3\times\cdots\times p_n$　…　①

$n=3$ のとき，　$p_n+7=p_n$ となる素数は存在しない。よって $n\geqq 4$

各 p_i は2以上なので，　$p_4+\cdots+p_n\leqq p_4\times\cdots\times p_n$

左辺を s とおくと，①より　$s+p_3+7=p_3\times(p_4\times\cdots\times p_n)\geqq sp_3$

変形して　$(s-1)(p_3-1)\leqq 8$　…　②

s は2以上の整数であるから　$p_n-1\leqq 8$　　よって $p_3=2$ または 3または 5または7

同様の理由で p_4 以降もすべて 2または 3または 5または7である。

[1]　$p_3, p_4, ..., p_n$ が7を含むとき

$p_3=7$ としてよい。このとき②より $s=2$

よって $(2, 5, 7, 2)$ となるが，これは条件を満たさない。

[2]　$p_3, p_4, ..., p_n$ が7を含まず5が含むとき

$p_3=5$ としてよい。このとき②より $s=2$ または $s=3$

さらに $s+p_3+7(=s+12)$ の素因数が2, 3, 5のみであるから $s=3$

よって $(2, 5, 5, 3)$　（これは条件を満たす）

[3]　$p_3, p_4, ..., p_n$ が 5 を含まず 3を含むとき

$p_3=3$ としてよい。 p_4 以降は2 または 3で，②から $s=2, 3, 4, 5$ である。

さらに $s+p_3+7(=s+10)$ の素因数が2, 3のみであるから $s=2, 5$

よって求める組は $(2, 5, 3, 2)$ または $(2, 5, 3, 2, 3)$

これはいずれも条件を満たさない。

[4]　$p_3, ..., p_n$ がすべて2のとき

①の左辺は $2n+3$ ，右辺は2^{n-2}であるから条件を満たさない。

以上から 求める組は $(2, 5, 5, 3)$ とその並び替え

$\boxed{5}$ 【第25回北海道数学コンテスト（改題）】

鳩の巣原理の考え方を使って以下の事実がいえる理由を説明したい。

何を鳩，何を鳩の巣と考えたのかを明示して説明せよ。

(1) ある町の住民1000人を調査したところ，この町の住民の中には同じ誕生日の人が3人以上いる日がある。

(2) 5以下の正の数（整数でなくともよい）を6つ考える。その中のどれか2つは必ず差が1未満になる。

(3) 一辺の長さが70 cmの正方形の形をした射的の的があり，50発の弾丸が異なる50か所に当たった。このとき，ある2つの弾丸で，その2点間の距離が15 cm未満のものがある。

(4) n 個の自然数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ に対して，その中の何項かをとってきて和を作る。

このとき，それらの和の中で n で割り切れるものがある。

(解説)

(1) 住民を鳩、誕生日を鳩の巣とすると，鳩1000羽に対して鳩ノ巣が366個あるので

少なくとも1つの巣には鳩が3匹入る。この人たちの誕生日は同じである。

(2) 6つの正の数 x を鳩とする。

5以下の正の数は $0<x\leqq1$， $1<x\leqq2$， $2<x\leqq3$， $3<x\leqq4$， $4<x\leqq5$ の5つの区間に分けられる。

この5つの区間を鳩の巣とすると，少なくとも1つの巣には2つの数字が入り，この2つの数字の差は1未満。

(3) 当たった弾丸を鳩とする。

正方形の的を一辺が10 cmの正方形に区切ると，49個の部分に分けられる。

これを鳩の巣とすると，少なくとも1つの巣には2つの弾丸が入る。

（正方形の境界に当たった場合は，その場所に接する好きな巣に入れる）

この2つの弾丸の距離は最も長くて $10\sqrt{2}$ cmであり， $10\sqrt{2}<15$ だから、距離は15 cm未満。

(4) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする。

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ の中に n の倍数があれば，それが求めるものとなる。

n の倍数がない場合， $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ をそれぞれ n で割った余りを鳩，整数 $1, 2, 3, \ldots, n-1$ を鳩の巣とすると，いずれか1つの巣には2つの数字が入る。

これを S_k と S_l （$k<l$）とすると， $S_l-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ は n の倍数で，これが求める和である。

6 【British Mathrmatical Olympiad Round 1, 5 2015/2016】

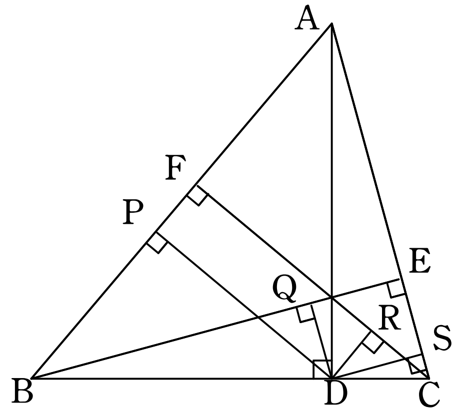
三角形 ABC において，点 A から 直線 BC に，点 B から直線 CA に，点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を，それぞれ D，E，F とする。さらに，点 D から直線 BA，直線 BE，直線 CF，直線 CA に下ろした垂線の足を，それぞれ P，Q，R，S とする。

このとき，4 点 P，Q，R，S は同一直線上にあることを示せ。

(解説)

示すべきことは，「直線 BE と直線 PS との交点を H とすると，DH ⊥ BE となること」である。

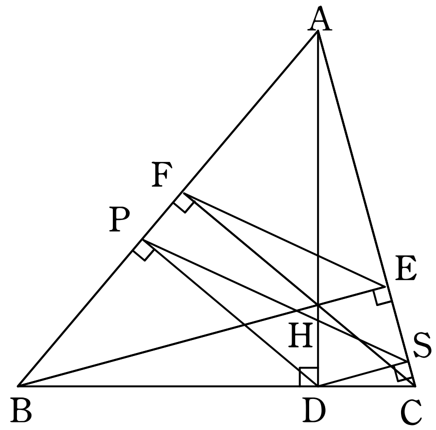
このことが示せれば，点 Q が H と一致すること，すなわち Q が直線 PS 上にあることが示せ，同様に R が直線 PS 上にあることも示せるので，証明は完了する。



∠BFC＝∠BEC＝90° なので，四角形 FBCE は円に内接する。

よって　　∠AFE＝∠ECB　……①

また，円周角の定理により　∠EBC＝∠EFC　……②



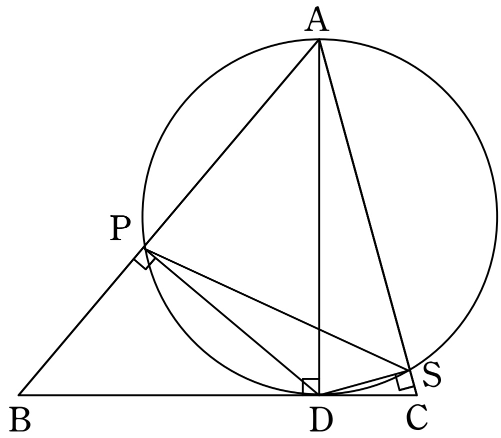
∠AFC＝90° なので，点 F において

∠EFC＝90°－∠AFE　……③

∠DSC＝90° なので，△SDC において

∠SDC＝90°－∠SCD　……④

①，③，④より　　∠EFC＝∠SDC　……⑤



∠APD＝∠ASD＝90° なので，四角形 APDS は線分 AD を直径とする円に内接する。さらに，∠ADC＝90° であるから，直線 BC はこの円の点 D における接線である。

ゆえに，接弦定理から ∠SPD＝∠SDC　……⑥

②，⑤，⑥より

∠EBC＝∠SPD　……⑦

ここで，直線 BE と直線 PS の交点を H とすれば，⑦は　　∠HBD＝∠HPD

したがって，円周角の定理の逆により，4 点 P，B，D，H は同一円周上にある。

この円における円周角の定理により　∠DHB＝∠DPB=90°

これで示せた。

7 問題2

1 つの部屋に 101 人の人がいる.。このとき, 次のどちらかが成り立つことを示せ。

[1]　10 人以上の人と知り合いの人が少なくとも 1 人いる。

[2]　11 人の人々の集団が存在し, そのどの 2 人も互いに知り合いでない。

(解説)

解答例

[1] の人が存在するときは, [1] の条件を満たすので, [1] を満たす人が存在しないときに, [2] の条件を満たす集団が存在することを示す。

[1] の人が存在しないとき, すなわちどの人も高々 9 人しか知り合いがいないと仮定する。

このとき, どの 2 人も知り合いでない 10 人を選ぶことができ, この 10 人を $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ とする。

この 10 人とそれぞれの知り合いの集合を X としたとき, X の要素の個数は100 以下である。

よって, 101 人のうち, 少なくとも 1 人は X に属さない人がおり, この人は $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ の誰とも知り合いではないので, [2] を満たす 11 人の集団が存在することが示せる。

8 【数学オリンピック予選2011－7】

3×3 のマス目があり, 1 以上 9 以下の整数がそれぞれ 1 回ずつ現れるように各マスに 1 つずつ書かれている。各列に対し, そこに書かれた 3 つの数のうち 2 番目に大きな数にそれぞれ印をつけると, 印のついた 3 つの数のうち 2 番目に大きな数が 5 になった。このとき, 9 個の整数の配置として考えられるものは何通りあるか。

(解説)

　問題文のように印をつけるとき, 5 に印がつきさえすれば題意を満たす数の配置になる。なぜなら, 5 に印がついているとき, その列には 1 から 4 の数が 1 つ書かれている。このとき, 5 が書かれていない 2 列には 1 から 4 の数のうち 3 つが書かれているので, いずれか一方の列には少なくとも 2 個以上の 1 から 4 の数が書かれている。 この列の 2 番目に大きい数は1 から 4 の数なので, 1 から 4 の数に印がついていることがわかる。同様にして, 6 から 9 の数が 2 個以上書かれた列があることがわかり, この列は 6 から 9 の数に印がついている。以上より, 1 から 4 の数, 5, 6 から 9 の数にひとつずつ印がついているので, 5 は 2 番目に大きい数になっている。

　ある列に 5 を書く場合の数は 3 通り。 5 を書いた列の 5 以外の数の書き方は$4^2 \times 2$ 通り。残り 6 マスの数の書き方は 6! 通り。 5 を書く列の選び方は 3 通り。

よって, 求める 9 個の整数の配置は

$$3 \times 4^2 \times 2 \times 6! \times 3 = 207360 \text{ (通り)}$$