

1 [2006 JMO予選 第7問]

x, y, z は相異なる2桁の正の整数であり、 x の一の位の数字と y の十の位の数字は等しく、 y の一の位の数字と z の十の位の数字は等しく、 z の一の位の数字と x の十の位の数字は等しい。このような3つの数 x, y, z の最大公約数として考えられる値は何個か。

2 [2011 アジア太平洋数学オリンピック(APMO)問題1]

a, b, c を正の整数とすると、 $a^2 + b + c, b^2 + c + a, c^2 + a + b$ の3つの数が同時に平方数とはならないことを示せ。ただし、平方数とはある整数の2乗になっている整数のことを言う。

3 [2003 JMO予選 問題3 改題]

p は素数で、 m は正の整数である。 m 個の整数 $a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_0$ は0以上 $p-1$ 以下であり、

$$\begin{cases} a_{m-1}p^{m-1} + a_{m-2}p^{m-2} + \dots + a_1p + a_0 = 2012 \\ a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_1 + a_0 = 24 \end{cases}$$

が成立している。 p として考えられる数をすべて求めよ。

4 [1984 IMO プラハ大会 問題 2]

次の条件 (i), (ii) を満たす正の整数 a, b の組を 1 組見つけなさい。

- (i) $ab(a+b)$ は 7 で割り切れない。
- (ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ は 7^7 で割り切れる。

ヒント

必要であれば、以下の定理を用いてもよい。

(オイラーの定理)

自然数 N と互いに素である任意の自然数 c について、

$$c^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$$

が成り立つ。ここで $\phi(N)$ とは、

0 以上 N 未満の整数の中で、 N と互いに素であるものの個数を表す。