$\boxed{1}$〔2005 年　広中杯（ファイナル）〕(改題)

縦の長さも横の長さも整数であるような，正方形でない長方形の形をした紙がある。この紙に対して，次のような〈操作〉を繰り返す。

> 〈操作〉　その長方形に含まれる，最大の正方形を切り落とす。

〈操作〉の後の紙が長方形であれば〈操作〉を続け，〈操作〉の後の紙が正方形であれば，そこで〈操作〉を終わる。〈操作〉が終わるまでの回数を，元の長方形の「耐数」，最後に残った正方形の1辺の長さを，元の長方形の「基本サイズ」ということにする。

たとえば，2×5 の長方形は，耐数 3，基本サイズ 1 である。

（１）　144×233 の長方形の耐数，基本サイズを求めよ。

（２）　短い方の辺の長さが整数，長い方の辺の長さが 350 である長方形で，耐数が 4 であるようなものはいくつあるか。

（３）　短い方の辺の長さが整数，長い方の辺の長さが 800 である長方形で，基本サイズが 2 であるようなものはいくつあるか。

（４）　$(3^{21}-1)\times(3^{18}-1)$ の長方形の基本サイズを求めよ。

$\boxed{2}$〔1995　AIME　８番〕(改題)

$\dfrac{x+1}{y+1}$ と $\dfrac{x}{y}$ がともに整数となるような正の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。

ただし，$y < x \leqq 100$ とする。

$\boxed{3}$　合同式

$$1^n+2^n+3^n+4^n \equiv 0 \pmod 5$$

を満たす負でない整数 n の条件を求めよ。

$\boxed{4}$ **◆この問題は講演のための予習用問題です。講演を聴講する前に、各自で一度考えてみてください。なお、本問は交流・解説の時間には扱いませんので、余裕がある範囲で取り組んでください。**

［2015　京都・大阪数学コンテスト　４番］（改題）

次の問い（１）～（３）に答えなさい。ただし，ここでいう差とは大きい方の数から小さい方の数を引いた値のこととする。

（１）　集合$\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 15\}$の部分集合$S$は，どの2つの要素をとってもその差が5　にも11にもならない。このような集合Sの要素の個数の最大値は，8であることを示しなさい。

（２）　集合$\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2015\}$の部分集合$S$は，どの2つの要素をとってもその差が5にも11にもならない。このような集合Sの要素の個数の最大値を求めなさい。

（３）　2つの正の整数a，bは，互いに素な奇数であるとする。

kを正の整数として集合$U=\{0, 1, 2, 3, \cdots, k(a+b)-1\}$を考え，集合$U$の部分集合$S$は，どの2つの要素をとってもその差が$a$にも$b$にもならない。このような集合$S$の要素の個数$n(S)$の最大値は，$\dfrac{k(a+b)}{2}$であることを示しなさい。

さらに，これを満たすSは2通り存在し，それは集合Uの要素の偶数全体からなる集合と，集合Uの要素の奇数全体からなる集合に限ることを示しなさい。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{5}$〔1993　JMO予選　１番〕（改題）

n^2 を120 で割ると 1 余るような，120 以下の正の整数 n はいくつあるか。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{6}$　$2x^2+3y^2=z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{7}$〔1995　TOT　春JO　問 4〕(改題)

十進法で，4000⋯009（4 と 9 の間に 0 が 1 個以上並ぶ）という形の整数は完全平方数ではないことを証明せよ。

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で取り組んでください。

$\boxed{8}$ フィボナッチ（ Fibonacci ）数列の第 n 項を，F_n と表す。すなわち，数列 $\{F_n\}$ を，

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

とおく。すると，次のような数列となる。

$$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ F_7=13,\ F_8=21,\ F_9=35,\ \cdots$$

このとき，すべての正の整数 n に対して，次の（１）が成り立つことを証明せよ。

（１） $4F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}+1$ は，平方数である。