$\boxed{1}$

（1）　$\dfrac{3}{p}+\dfrac{2}{q}=1$ を満たす自然数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めなさい。

解答　両辺を pq 倍すると，

$$3q+2p=pq$$
$$pq-2p-3q=0$$
$$pq-2p-3q+6=6$$
$$(p-3)(q-2)=6 \cdots\cdots ①$$

いま，p,q は自然数より，$p-3$，$q-2$ は整数である。

$p-3$，$q-2$ の値の組は，次のとおりである。

$$\begin{cases} p-3=1 \\ q-2=6 \end{cases} \begin{cases} p-3=-1 \\ q-2=-6 \end{cases} \begin{cases} p-3=2 \\ q-2=3 \end{cases} \begin{cases} p-3=-2 \\ q-2=-3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} p-3=3 \\ q-2=2 \end{cases} \begin{cases} p-3=-3 \\ q-2=-2 \end{cases} \begin{cases} p-3=6 \\ q-2=1 \end{cases} \begin{cases} p-3=-6 \\ q-2=-1 \end{cases}$$

これらのうち，p,q がともに自然数となるのは，

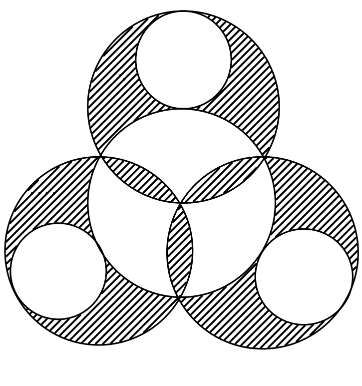
$$\begin{cases} p-3=1 \\ q-2=6 \end{cases} \begin{cases} p-3=2 \\ q-2=3 \end{cases} \begin{cases} p-3=3 \\ q-2=2 \end{cases} \begin{cases} p-3=6 \\ q-2=1 \end{cases}$$

の４組である。

これらを解いて，①を満たす自然数 $(p,\ q)$ の組は，

$(p,\ q)=(4,\ 8),(5,\ 5),(6,\ 4),(9,\ 3)$　……答

（2）　京都府宮津市の智恩寺文珠堂には，下の図に示す図形の性質を問う算額が奉納されている。いま，この図形が半径 $2r$ の大円４つと半径 r の小円３つから構成されており，外側の３つの大円の共有点が内側の大円の中心であるとすると，図の斜線部分の面積はいくらになるか求めなさい。ただし，円周率は π とする。



解答

右の図１の斜線部分を６分割し，そのうちの２つを内側の円の内部で移動させたものを考えると，求める面積 S は，図２の斜線部分の面積の３倍になる。

図１

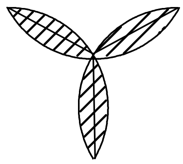
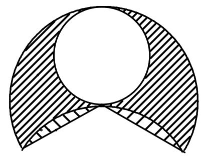


図２



この部分の面積は，大円の面積の３分の２から，小円の面積を除いたものに等しい。

よって

$$S=3\cdot\left\{\pi\cdot(2r)^2\cdot\frac{2}{3}-\pi r^2\right\}$$

$$=3\cdot\frac{5}{3}\pi r^2$$

$$=5\pi r^2$$ ……答

（３）　x についての整式 $P(x)$ を２乗すると，

$$\{P(x)\}^2=x^{10}+2x^9+3x^8+4x^7+5x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$

となった。整式 $P(x)$ を１つ求めなさい。

解答　$\{P(x)\}^2$ の次数が10であるから，$P(x)$ は５次式である。

また，x^{10} の係数は１なので，$P(x)$ の x^5 の係数は１または－１である。

$P(x)$ の x^5 の係数が１のときを考える。

いま，$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおくと，

$\{P(x)\}^2=(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$ の展開式において，x^9 の項は，$x^5\cdot ax^4+ax^4\cdot x^5=2ax^9$ であるから，係数を比較して，

$2=2a$ より $a=1$

したがって，$P(x)=x^5+x^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおける。

次に，$\{P(x)\}^2=(x^5+x^4+bx^3+cx^2+dx+e)(x^5+x^4+bx^3+cx^2+dx+e)$ の展開式において，x^8 の項は，$x^5\cdot bx^3+x^4\cdot x^4+bx^3\cdot x^5=(2b+1)x^8$ であるから，係数を比較して，

$3=2b+1$ より $b=1$

したがって，$P(x)=x^5+x^4+x^3+cx^2+dx+e$ とおける。

次に，$\{P(x)\}^2=(x^5+x^4+x^3+cx^2+dx+e)(x^5+x^4+x^3+cx^2+dx+e)$ の展開式において，x^7 の項は，$x^5\cdot cx^2+x^4\cdot x^3+x^3\cdot x^4+cx^2\cdot x^5=(2c+2)x^7$ であるから，係数を比較して，

$4=2c+2$ より $c=1$

したがって，$P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+dx+e$ とおける。

次に，$\{P(x)\}^2=(x^5+x^4+x^3+x^2+dx+e)(x^5+x^4+x^3+x^2+dx+e)$ の展開式において，x^6 の項は，$x^5\cdot dx+x^4\cdot x^2+x^3\cdot x^3+x^2\cdot x^4+dx\cdot x^5=(2d+3)x^6$ であるから，係数を比較して，

$5=2d+3$ より $d=1$

したがって，$P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+e$ とおける。

次に，$\{P(x)\}^2=(x^5+x^4+x^3+x^2+x+e)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+e)$ の展開式において，x^5 の項は，$x^5\cdot e+x^4\cdot x+x^3\cdot x^2+x^2\cdot x^3+x\cdot x^4+e\cdot x^5=(2e+4)x^5$ であるから，係数を比較して，

$6=2e+4$ より $e=1$

したがって，$P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ とおける。

ここで，$\{P(x)\}^2=(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2$

$$=x^{10}+2x^9+3x^8+4x^7+5x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$

である。

また，$P(x)$ の x^5 の係数が－１のときは，$-P(x)$ の x^5 の係数が１で，

$\{-P(x)\}^2=\{P(x)\}^2$ なので，

$-P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

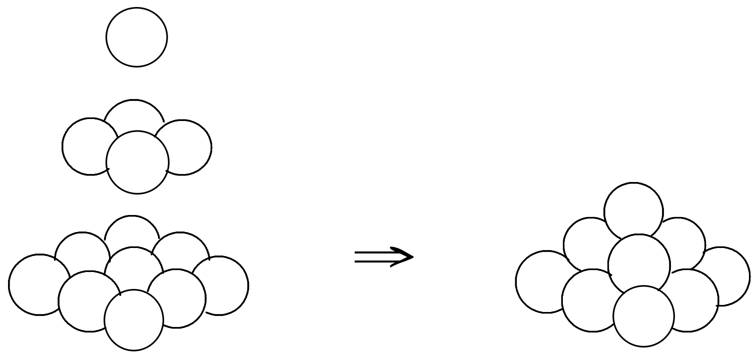
すなわち，$P(x)=-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1$

ゆえに，求める整式 $P(x)$ は，

$P(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$　または　$P(x)=-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1$

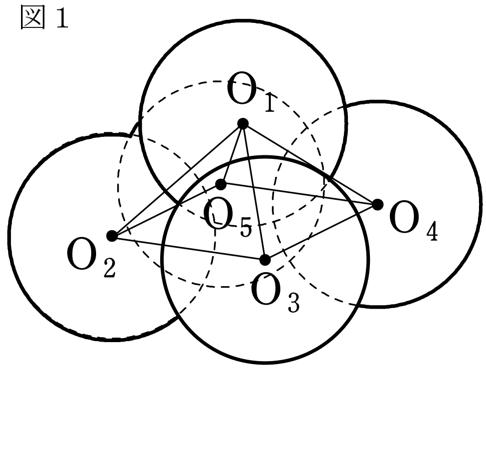
……答

（4）　下の図のように，半径 r の球14個をピラミッド状に積み上げた。このピラミッドの高さを求めなさい。



解答　まず 5 つの球を積んだ状態を考える。このとき，球どうしは互いに接することから，中心間の距離はすべて $2r$ である。球の中心を図１のように O_1，O_2，O_3，O_4，O_5 とすると，図２のように底面が正方形の四角錐ができる。

図１



正方形 $O_2O_3O_4O_5$ は1辺の長さが $2r$ なので，対角線 $O_2O_4 = 2\sqrt{2}\,r$ よって三角形 $O_1O_2O_4$ は，$\angle O_2O_1O_4 = 90°$, $O_1O_2 = O_1O_4 = 2r$ の直角二等辺三角形になる。（図３）

したがって　この四角錐の高さ h は

$h = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 2r = \sqrt{2}\,r$　である。

図２

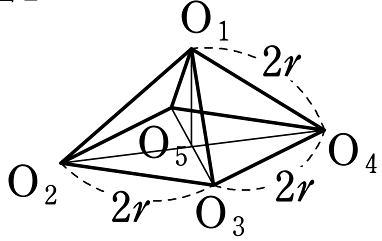


図３

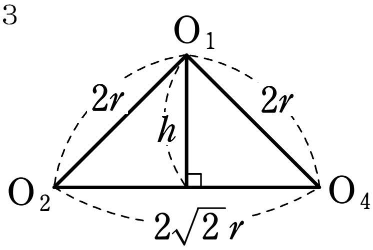
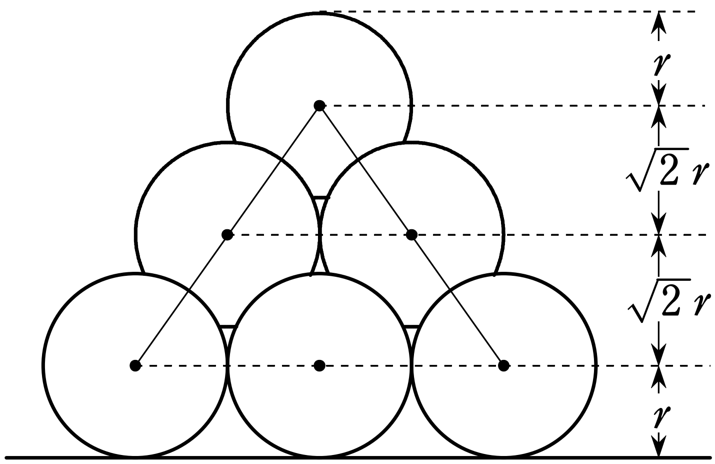


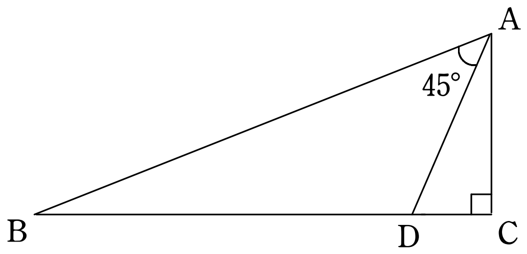
図４



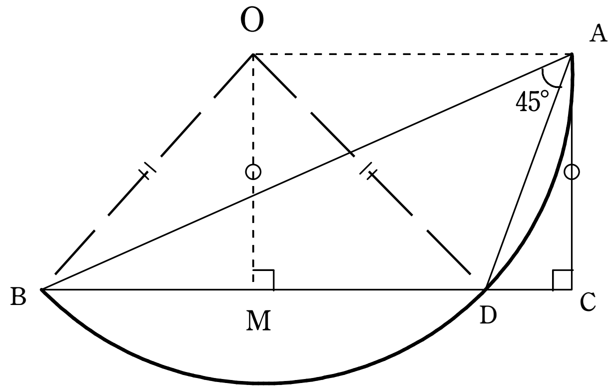
14 個の球をピラミッド状に積み上げたものを真横から見ると，図４より，求める高さは

$r + \sqrt{2}\,r + \sqrt{2}\,r + r = 2(1 + \sqrt{2})\,r$　……答

2　下の図において，BD＝２AC であるとき，∠ABDの大きさを求めなさい。



解答



△ABDの外心をOとする。

中心角と円周角との関係から∠BOD＝2∠BAD＝90°,

（外接円の半径） OB＝ODであるので，△OBDは直角二等辺三角形である。

外心OからBDに垂線を下ろし，その足をMとする。

OM＝BM＝DMであるから BD＝2OM , これと仮定から AC＝OM がいえる。

ゆえに、四角形OMCAは長方形である。

OA∥BD から、∠AOD＝∠BDO＝45° また、中心角と円周角との関係から
∠AOD＝２∠ABD

よって∠ABD＝22.5°　……答

$\boxed{3}$　2008個の分数 $\dfrac{1}{2008}$，$\dfrac{2}{2008}$，$\dfrac{3}{2008}$，……，$\dfrac{2008}{2008}$ の中で，既約分数であるものの和を求めなさい。ただし，既約分数とは，例えば$\dfrac{3}{4}$ や $\dfrac{5}{8}$のように，それ以上約分することができない分数のことである。

解答　2008 は，$2008=2^3\cdot 251$ と素因数分解できる。

全体集合Uを，$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 2008\}$ とし，その部分集合 A，B を

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,2008\}$，$B=\{251,\ 502,\ 753,\ \cdots,2008\}$ とすると，

$A\cap B=\{502,\ 1004,\ 1506,\ 2008\}$ である。

また，$n(U)=2008$，$n(A)=1004$，$n(B)=8$，$n(A\cap B)=4$ であるから，

求める既約分数の和の分子部分の和は

$$
\begin{aligned}
&(1+2+3+\cdots+2008)-(2+4+6+\cdots+2008)\\
&\qquad\qquad -(251+502+\cdots+2008)+(502+1004+1506+2008)\\
&=\frac{2008\cdot 2009}{2}-2\cdot\frac{1004\cdot 1005}{2}-251\cdot\frac{8\cdot 9}{2}+502\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\\
&=\frac{2008\,(2009-1005-9+5)}{2}
\end{aligned}
$$

であるから，求める既約分数の和は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2008}\cdot\frac{2008\,(2009-1005-9+5)}{2}&=\frac{1000}{2}\\
&=500\ \cdots\cdots\text{答}
\end{aligned}
$$

4　Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４人で，次のルールにしたがって「じゃんけん」を行い，ただ１人の勝者を決める。

【ルール】
- ただ１人の勝者が決まるまで「じゃんけん」を繰り返し行う。
- 「じゃんけん」をして負けた者は次の「じゃんけん」には参加できない。
- 各回の「じゃんけん」では，必ず勝者が決まる。
　（「あいこ」になることはないものとする。）

このとき，ただ１人の勝者の決まり方は全部で何通りあるか求めなさい。

解答　２人で勝敗が決まるのは，２人から１人が勝ち残る場合のみで，

２人から勝つ１人の選び方は ${}_2C_1$ 通り

グー，チョキ，パーのどれで勝つかが３通り

よって，${}_2C_1\times3=6$ 通り

次に，３人で勝敗が決まるのは，３人から１人が勝ち残る場合か，３人から２人が勝ち残る場合のいずれかである。

３人から１人が勝ち残る場合は，${}_3C_1\times3=9$ 通り

３人から２人が勝ち残る場合は，${}_3C_2\times3=9$ 通り

さらに，４人で勝敗が決まるのは，４人から１人が勝ち残る場合か，４人から２人が勝ち残る場合か，４人から３人が勝ち残る場合のいずれかである。

４人から１人が勝ち残る場合は，${}_4C_1\times3=12$ 通り

４人から２人が勝ち残る場合は，${}_4C_2\times3=18$ 通り

４人から３人が勝ち残る場合は，${}_4C_3\times3=12$ 通り

したがって，３人から１人の勝者の決まり方は，

３人→１人　　　　のとき，９通り

３人→２人→１人　のとき，$9\times6=54$ 通り

の場合があり，これらは同時にはおこらないので，$9+54=63$ 通り

ゆえに，４人から１人の勝者の決まり方は，

４人→１人　　　　のとき，12通り

４人→２人→１人　のとき，$18\times6=108$ 通り

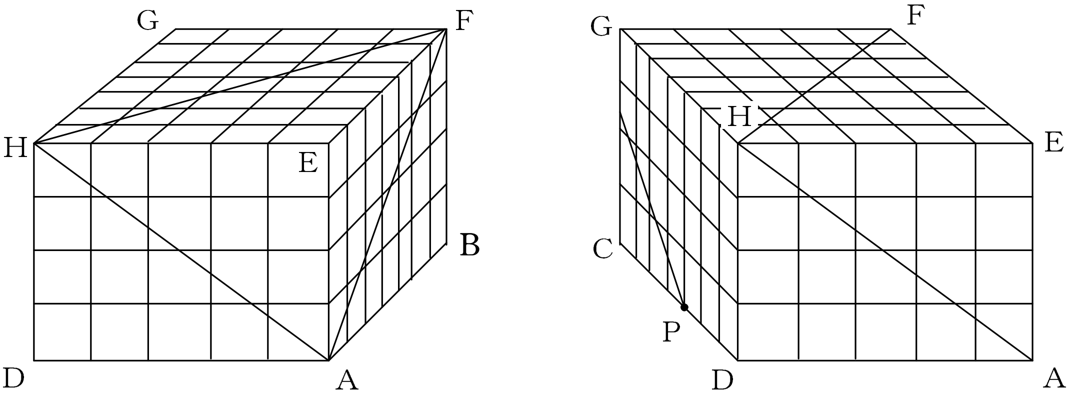
４人→３人→１人　のとき，$12\times9=108$ 通り

４人→３人→２人→１人のとき，$12\times9\times6=648$ 通り

の場合があり，これらは同時に起こらないので，ただ１人の勝者の決まり方は，

全部で $12+108+108+648=876$ 通り　……答

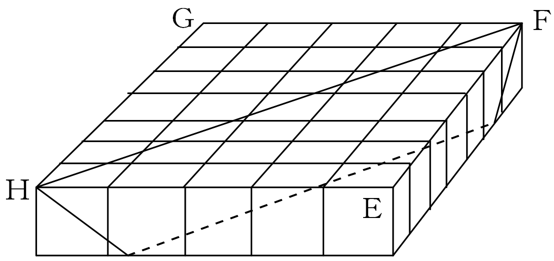
5　下の図のように，１辺の長さが１の立方体140個を積み上げて，直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを作った。この直方体を３つの頂点 A，F，H を通る平面 α で切る。さらに，辺ＣＤ上にＤＰ＝３となる点Ｐをとり，点Ｐを通り平面 α に平行な平面 β で切る。このとき，これら140個の立方体のうち，切り口（切断面）の一部を含む立方体の個数を求めなさい。



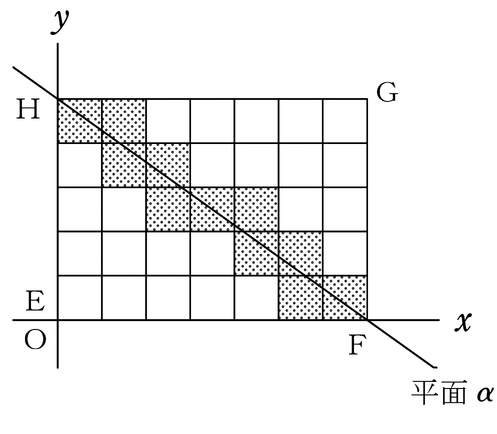
（直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを異なる２つの方向から見た図）

解答　点Ａを原点とし，直線ＡＢを x 軸，直線ＡＤを y 軸，直線ＡＥを z 軸にとる。

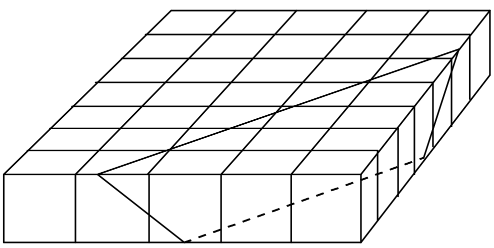
（上から１段目）



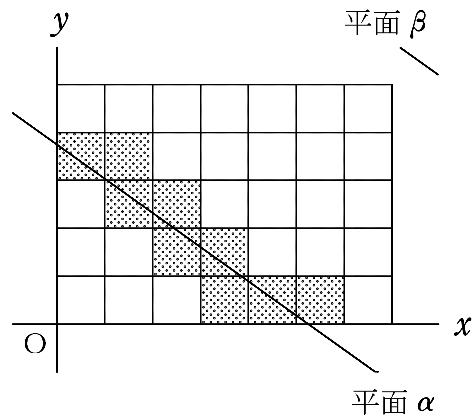
$z=4$ の平面



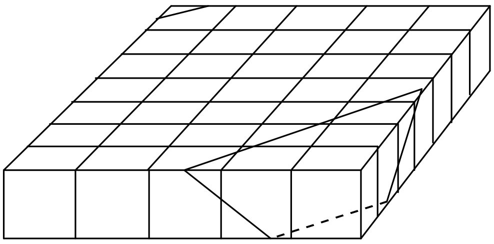
（上から２段目）



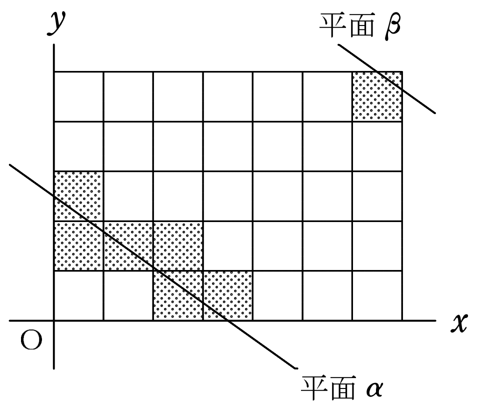
$z=3$ の平面



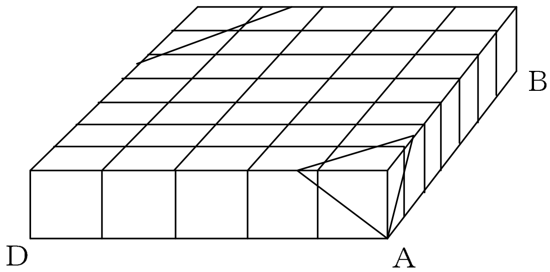
（上から３段目）



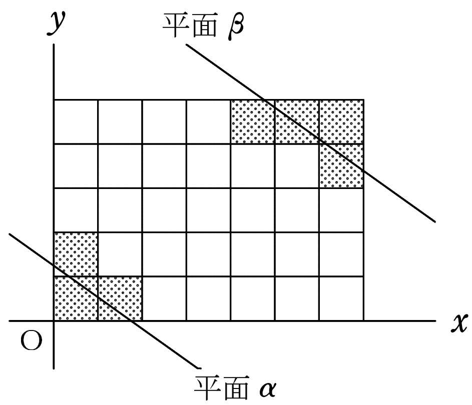
$z=2$ の平面



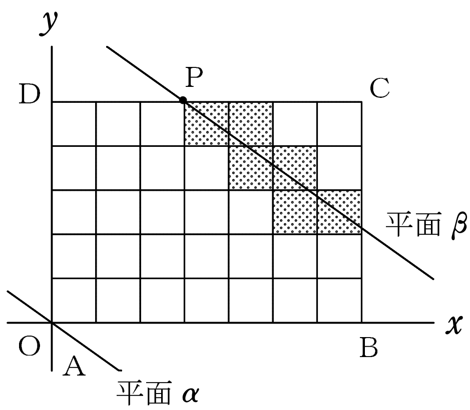
（上から４段目）



$z=1$ の平面



$z=0$ の平面



$0 \leqq z \leqq 1$ のとき，平面 α で切られる立方体は３個

平面 β で切られる立方体は６＋４－１＝９個

したがって，３＋９＝12個

$1 \leqq z \leqq 2$ のとき，平面 α で切られる立方体は６＋３－１＝８個

平面 β で切られる立方体は４＋１－１＝４個

したがって，８＋４＝12個

$2 \leqq z \leqq 3$ のとき，平面 α で切られる立方体は９＋６－２＝13個

平面 β で切られる立方体は１個

したがって，13＋１＝14個

$3 \leqq z \leqq 4$ のとき，平面 α で切られる立方体は11＋９－３＝17個

平面 β で切られる立方体は０個

したがって，17＋０＝17個

ゆえに，求める立方体の個数は

12＋12＋14＋17＝55個　……答