第２回　数学オリンピック道場

１．ＪＭＯ　１９９２ $\boxed{7}$

x, yは正整数で，x^4+y^4を$x+y$で割った商は97である。余りを求めよ。

２．ＪＭＯ　１９９６ $\boxed{7}$

次の方程式の正の整数解$(a\ ,\ b)$をすべて求めよ。

$$LCM(a,b)+GCM(a,b)+a+b=ab$$

ただし，$a \geqq b$とする。また，$LCM(a,b)$，$GCM(a,b)$は各々a，bの最小公倍数，最大公約数をあらわす。

３．ＪＭＯ　１９９６ $\boxed{6}$

Ｎは正整数全体の集合とし　$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$　は以下の条件(1),(2),(3)をみたす関数とする。

(1)　$f(xy)=f(x)+f(y)-1$　が任意の正整数x,yについて成り立つ。

(2)　$f(x)=1$をみたすxは有限個しか存在しない。

(3)　$f(30)=4$である。

このとき　$f(14400)$の値を求めよ。

４．１９８５　ソ連国内予選

整数$1,2,\cdots\cdots,2n-1,2n$をn個ずつの数を含む2つのグループに分けてある。
第１のグループは大きい順に並べて

$$a_1>a_2>\cdot\cdot\cdot\cdot>a_n$$

とし，第２グループは小さい順に並べて，

$$b_1<b_2<\cdot\cdot\cdot\cdot<b_n$$

とする。このときいかなる分け方に対しても常に

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdot\cdot\cdot\cdot+|a_n-b_n|=n^2$$

となることを示せ。