

京都数学グランプリ 2009 1st ステージ

平成 21 年度

京都数学コンテスト

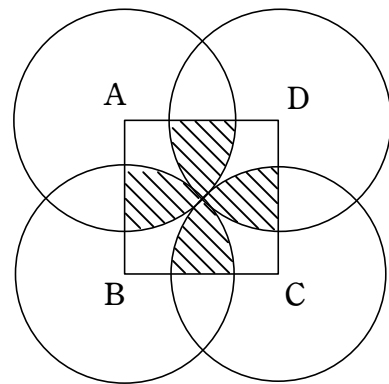
注 意 事 項

- 1 問題は、1 ページから 6 ページにあります。
- 2 解答用紙は、全部で 5 枚あります。
- 3 コンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
- 4 解答は、問題番号に対応した解答用紙にすべて記入してください。
- 5 解答時間は 3 時間です。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

※ **1**については、解答用紙の枠内に答えのみを記入しなさい。

1 (1) 2009^{2009} を5で割ったときの余りを求めなさい。ただし、余りは0以上4以下の整数とする。

(2) 1辺の長さが a の正方形 $ABCD$ があり、各頂点を中心とした同一半径の円を描く。ただし、点 A と点 C 、点 B と点 D を中心とした円はそれぞれ接し、その接点は一致するものとする。このとき、円周率を π として、斜線部の面積を求めなさい。



(3) 3つの数 a, b, c の積は、結合法則が成り立つので括弧を省略して abc と書くが、積は2つずつ計算することを考えると、 $a(bc)$ と $(ab)c$ の2通りの括弧の付け方がある。

同様に、4つの数 a, b, c, d の積 $abcd$ は、全部で

$$a(b(cd)), a((bc)d), (ab)(cd), ((ab)c)d, (a(bc))d$$

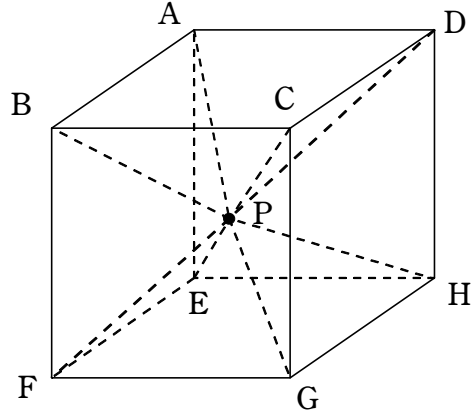
の5通りの括弧の付け方がある。

このように考えるとき、5つの数 a, b, c, d, e の積 $abcde$ は、全部で何通りの括弧の付け方があるか求めなさい。

ただし、5つの数 a, b, c, d, e の並びは、入れ替えないものとする。

※ ②から⑤については，解答用紙に答えのみではなく，考え方等も記入しなさい。

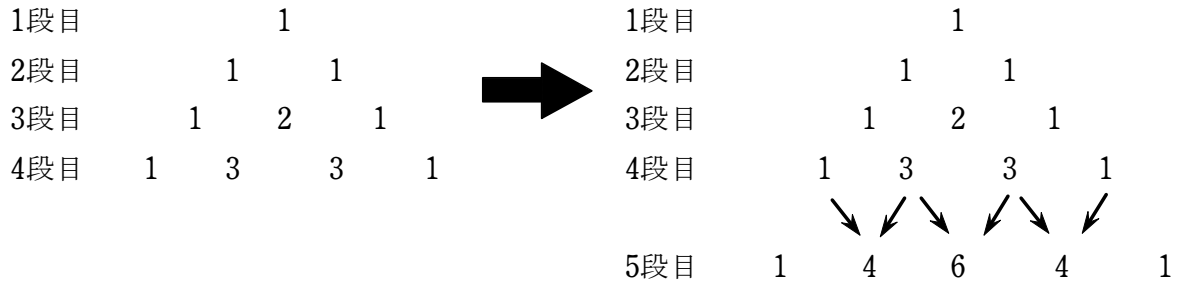
- ② 立方体 $ABCD - EFGH$ の内部に点 P をとり，点 P と立方体の面 $ABCD$ を用いて四角すい $P - ABCD$ をつくる。同様に，点 P と立方体の各面を用いて四角すいをつくり，全部で 6 個の四角すいをつくる。このとき，6 個の四角すいの体積比が $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$ となった。この条件を満たす点 P はいくつ存在するか求めなさい。



【裏へ続く】

- 3 パスカルの三角形とは、「1」からスタートし、2段目以降については、図Iのように両端は「1」を、それ以外は、上の段の左上と右上にある隣り合った2つの自然数を足して得られる自然数を置いて作っていく三角形のことである。

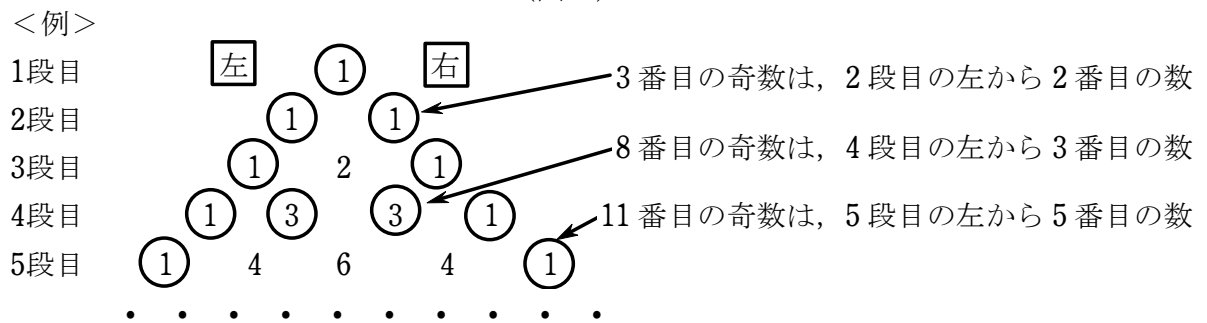
【例：4段目から5段目をつくる】 (図I)



図IIのように、パスカルの三角形において上から下へ、そして左から右へ奇数の個数を数えることとする。

- (1) 1段目から8段目までにある奇数は全部で何個か求めなさい。
- (2) 2009番目の奇数は何段目の左から何番目の数か求めなさい。

(図II)



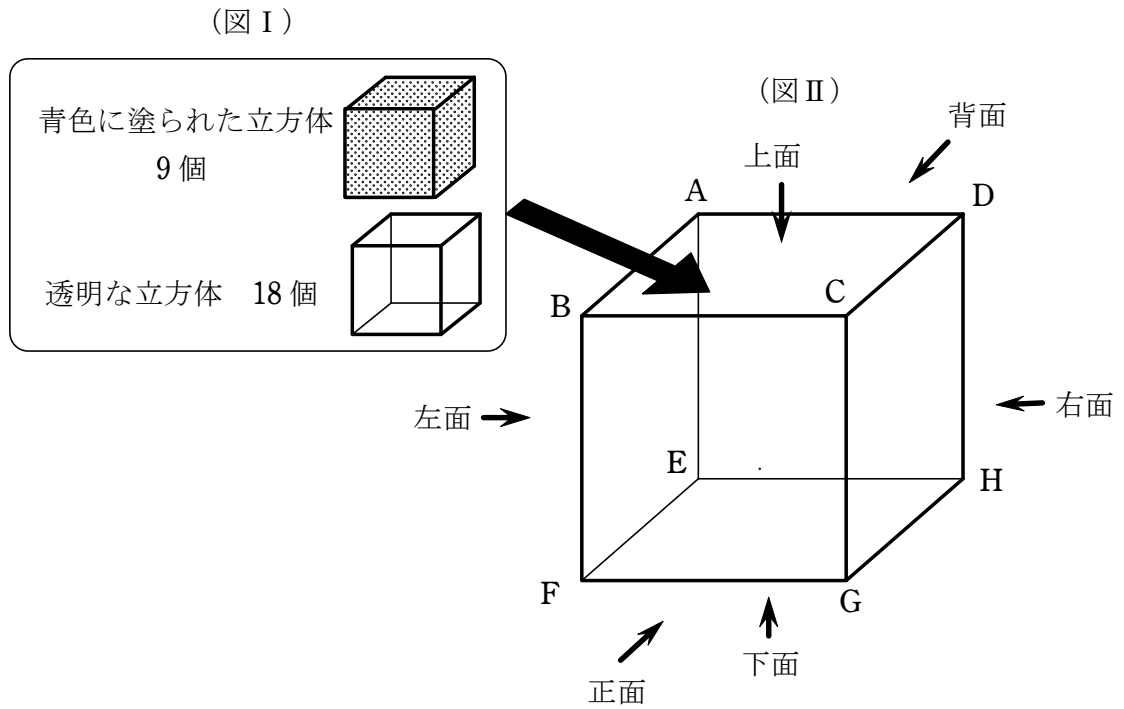
【 余 白 】

【裏へ続く】

- 4 図 I のように、6 面とも青色に塗られた 1 辺の長さが 1 cm の立方体が 9 個と、6 面とも透明で 1 辺の長さが 1 cm の立方体が 18 個の合計 27 個の立方体がある。

この 27 個すべての立方体を、図 II のような 1 辺の長さが 3 cm の透明な固定された立方体の容器 ABCD-EFGH の中にすき間なく詰める。

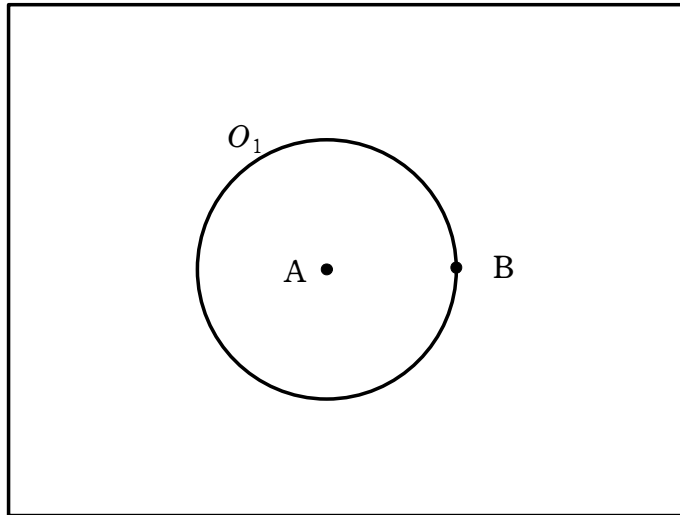
このとき、いずれの面（6 方向）から見てもすべて青色に見える配置は何通りあるか求めなさい。



- 5 平面上に与えられた2点A, Bの中点Mをコンパスのみを使って作図しなさい。ただし、コンパスを使って描ける円は8個以内とする。作図で描く円には O_1, O_2, \dots などの名前を付け、円の交点にはC, D, E...などの名前を付けて、図に書き込み、手順欄に手順1に続いて、円を描く手順を、中心と半径を明らかにして書きなさい。

また、証明欄に、作図した点Mが、与えられた2点A, Bの中点であることを証明しなさい。

<図>



(手順の解答例) 手順1 点Aを中心として半径ABの円 O_1 を描く。

【終わり】