京都数学オリンピック道場　第２回

１．　　『高木貞治「初等整数論講義」の例題』

n を整数とする。$26n$ を 57 で割って 1 余るとき，n を 57 で割った余りを求めよ。

解答

$n = n_1$ とおく。

条件より，ある整数 n_2 が存在して $26n_1 - 57n_2 = 1$ が成り立つ。

これを，

$26(n_1-2n_2)-5n_2=1$

と変形して，

$n_3=n_1-2n_2$とおく。

次に $26n_3 -5n_2=1$

を変形して

$5(5n_3-n_2)+n_3=1$

$n_4=5n_3-n_2$とおけば，

$n_1= n_3+2n_2= n_3+2(5n_3-n_4)= 11n_3-2n_4= 11(1-5n_4)-2n_4= 11-57n_4$

ゆえに，

n_1を 57 で割った余りは$\boxed{11}$となる。

別解

条件を合同式で表すと

$26n \equiv 1 \ (mod\ 57)$

次のように式変形すると

$26n \equiv 1 \Leftrightarrow 52n \equiv 2 \Leftrightarrow 5n \equiv -2 \Leftrightarrow 55n \equiv -22 \Leftrightarrow 2n \equiv 22 \Leftrightarrow n \equiv 11 \ (mod\ 57)$

ゆえに，

n を 57 で割った余りは$\boxed{11}$ となる。

（上の計算で，26, 5, 2 が 57 と互いに素であることを使っていることに注意）

２．　『1988　ソ連　8年生　問6』

黒板に数字 1 と 2 が書かれている。次の方法で新しい数を黒板に書き足すことが許されるものとする。黒板に数 a と b があるならば，$ab+a+b$ を書くことができる。例えば，1 と 2 があるので $1\cdot2+1+2=5$ により，また，2（と 2）があるので $2\cdot2+2+2=8$ により，5 と 8 は書くことができる。

このような方法で次の数を書くことができるか。

（ⅰ）13121
（ⅱ）12131

解答

等式 $ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$ より，この黒板 X に書くことのできる数に 1 を加えた数の全体は，別の黒板 Y に次の規則の下で書くことのできる数の全体に一致する。(-1と$+1$が相殺しているところがポイント)。

・最初，2 と 3 が書かれている。
・黒板に既に書かれている数の積を書き加えることができる。

このとき，黒板 Y に書くことのできる数全体は$\{2^n\cdot 3^m \mid n,\ m$は自然数または$0,\ n+m\geqq1\}$となる。

よって，$13121+1=13122=2\cdot3^8$

$12131+1=12132=2^2\cdot3^2\cdot337$により，

（ⅰ）$\boxed{\text{13121は書くことができる。}}$
（ⅱ）$\boxed{\text{12131は書くことができない。}}$

３．　『第２回ＩＭＯの問１』

3 桁の自然数 n は 11 の倍数であり，$\dfrac{n}{11}$ は nの各桁の 2 乗の和に等しい。

このような n をすべて求めよ。

解答

$\dfrac{n}{11}=10a+b$とおく。（a，$b\in\{0,\ 1,\ \cdot\cdot\cdot,\ 9\}$）

1. $a+b\leqq 9$のとき，

このとき n の百の位，十の位，一の位は a，$a+b$，b

となるので

$10a+b=a^2+(a+b)^2+b^2$

a の方程式とみなすと

$a=\dfrac{(5-b\pm\sqrt{D})}{2}$，$D=-3b^2-8b+25$

となる。

ここで D が平方数になるのは $b=0$ のときだけであり，これを解くと $a=5$

となる。

これは $a+b\leqq 9$ を満たす。

よって，

$\boxed{n=550}$ となる。

2. $a+b\geqq 10$のとき，

このとき n の百の位，十の位，一の位は $a+1$，$a+b-10$，b

となるので

$10a+b=(a+1)^2+(a+b-10)^2+b^2$。

aの方程式とみなすと

$a=\dfrac{(14-b\pm\sqrt{D})}{2}$，$D=-3b^2+14b-6$

となる。

ここで D が平方数になるのは $b=3$ のときだけであり，これを解くと$a=4$，7

となる。

このうち $a+b\geqq 10$を満たすのは

$a=7$ だけである。

よって，

$\boxed{n=803}$ となる。

４．　$x^2=p^5+p^2+1$ を満たす整数 x と素数 p は存在しないことを示せ。

解答　$x>0$で考えるものとする。

（Ⅰ）$p=2$のとき，$x^2=p^5+p^2+1=32+4+1=37$を満たすxは存在しない。

（Ⅱ）$p=3$のとき，$x^2=p^5+p^2+1=243+9+1=253$を満たす$x$は存在しない。

（Ⅲ）$p\geqq 5$のとき，

$x^2=p^5+p^2+1$が成り立つと仮定すると，$x^2-1=p^5+p^2$より，$(x-1)(x+1)=p^2(p^3+1)$

いま，$x-1$，$x+1$もpの倍数であると仮定すると，

$x-1=k_1p$　，$x+1=k_2p$　（k_1, k_2は整数で，$k_1\fallingdotseq k_2$）　と表せる。

差をとると，$2=(k_2-k_1)p$　であり，このような場合はない。

よって，$x-1$，$x+1$のいずれかがp^2の倍数である。

（ⅰ）$x-1=mp^2$　（mは整数で，$m>0$）のとき，$x=mp^2+1$であり，

$p^2(p^3+1)=x^2-1=(mp^2+1)^2-1=p^2(m^2p^2+2m)$より，

$p^3+1=m^2p^2+2m$であるから，$2m=p^2(p-m^2)+1$である。

$p^2(p-m^2)+1>0$　より　$p^2(p-m^2)>-1$

pは素数で，mは整数なので，$p-m^2\geqq 1$　となる。

ここで，$2m=p^2(p-m^2)+1\geqq p^2+1$　であって，

$$x=mp^2+1\geqq\frac{(p^2+1)p^2}{2}+1=\frac{1}{2}p^4+\frac{1}{2}p^2+1>\frac{1}{2}p^4>\frac{2}{5}p^4$$　である。

（ⅱ）$x+1=np^2$　（nは整数で，$n>0$）のとき，$x=np^2-1$であり，

$p^2(p^3+1)=x^2-1=(np^2-1)^2-1=p^2(n^2p^2-2n)$より，

$p^3+1=n^2p^2-2n$であるから，$2n=p^2(n^2-p)-1$である。

（ⅰ）と同様にして，$2n\geqq p^2-1$であって，

$$x=np^2-1\geqq\frac{(p^2-1)p^2}{2}-1=\frac{1}{2}p^4-\frac{1}{2}p^2-1>\frac{1}{2}p^4-\frac{1}{2}p^2\cdot\frac{p^2}{10}-1\cdot\frac{p^4}{20}=\frac{2}{5}p^4$$である。

（ⅰ）（ⅱ）より，いずれの場合も　$x^2>\dfrac{4}{25}p^8$で，$p\geqq 5$であることから，

$$x^2>\frac{2^2}{5^2}p^8\geqq\frac{4}{25}p^8\cdot\frac{25}{p^2}=4p^6>3p^5=p^5+p^5+p^5>p^5+p^2+1$$ となり，仮定に矛盾する。

以上のことより，$x^2=p^5+p^2+1$を満たす整数xと素数pの組は存在しない。