

令和元年度

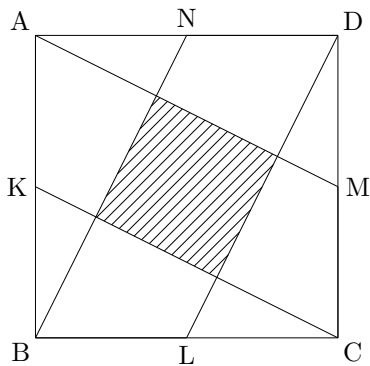
京都・大阪数学コンテスト

注 意 事 項

1. 問題は 1 ページから 6 ページまであります。
2. 解答用紙は、全部で 5 枚あります。
3. あなたのコンテスト番号と名前をすべての解答用紙に記入してください。
4. 解答は、問題番号に対応した解答用紙に記入してください。なお、問題番号 $\boxed{1}$ については答えのみを、問題番号 $\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ については答えのみでなく考え方等も記入してください。（問題番号 $\boxed{2}$ ～ $\boxed{5}$ については、考え方等も採点対象となります。）
5. 解答時間は 3 時間です。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

1 次の各問いに答えなさい。

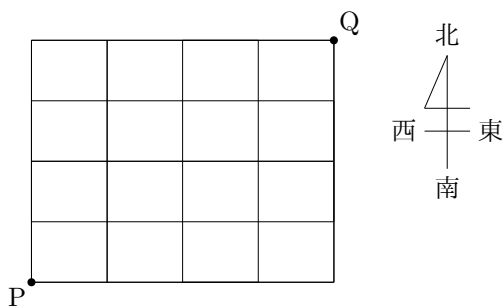
- (1) 図のように一辺の長さが 1 の正方形 ABCD があり、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ K, L, M, N とする。線分 AM, BN, CK, DL で囲まれた図形の面積を求めなさい。



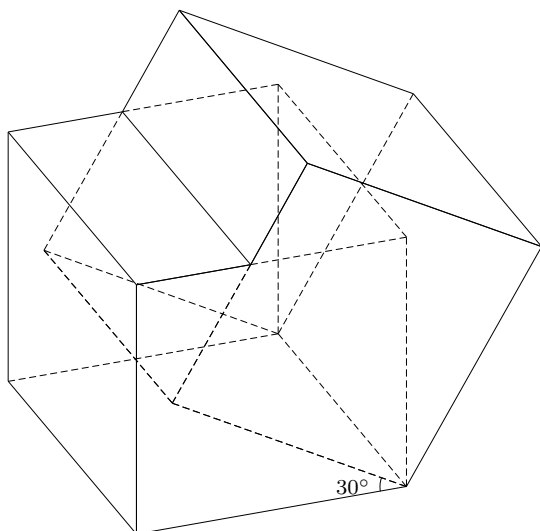
- (2) 図のように、東西方向に 5 本、南北方向に 5 本の道がある街がある。

太郎さんは、はじめ最も南西にある地点 P において、道を移動して、最も北東にある地点 Q に行きたい。

太郎さんは北、東、西の 3 方向に移動することができ、同じ地点を 2 度通らないようにするとき、何通りの道順が考えられるか。



- (3) 一辺の長さが 1 の立方体と、この立方体のある 1 つの辺を軸として 30° 回転させた立方体とを組み合わせることができる、図のような立体の表面積を求めなさい。



- (4) 40 人のクラスにおいて、1 から 40 までの番号が 1 つずつ書かれた 40 個のロッカーが教室に設置してある。
ある日、クラスの生徒全員が、登校した順に次の「指示」に従ってロッカーの扉の「操作」を行うこととした。

指示

登校してきた際、自分の出席番号の倍数が書かれている全てのロッカーの扉に、次の「操作」を 1 人 1 回ずつ行う。

操作

ロッカーの扉が開いているときには閉め、閉まっているときには開ける。

最初の生徒が登校してきたときは、ロッカーの扉は全て閉まった状態であり、40 人全員が登校し「操作」を行った後に開いていたロッカーの番号は

1, 4, 9, 16, 24, 25

であった。

また、ある 1 人の生徒だけが「指示」の内容を間違えて、自分のロッカーに対してだけ「操作」を行っていたことがわかった。

このとき、「指示」の内容を間違えた生徒の出席番号を答えなさい。

2 一辺が4の立方体 ABCD-EFGH がある。この立方体の面 ABCD を、図1のように16等分し、正方形 IJKL を作る。

図2のように、正方形 IJKL 上に点 P を、正方形 EFGH 上に点 Q をとる。

点 P が正方形 IJKL の内部及び周上全体を動き、点 Q が正方形 EFGH の内部及び周上全体を動くとき、線分 PQ が通過する領域の体積を求めなさい。

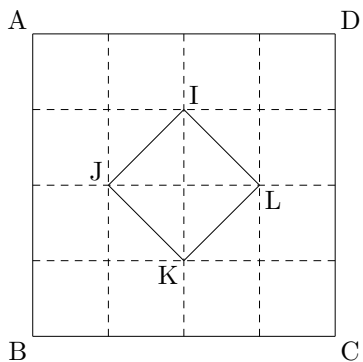


図1

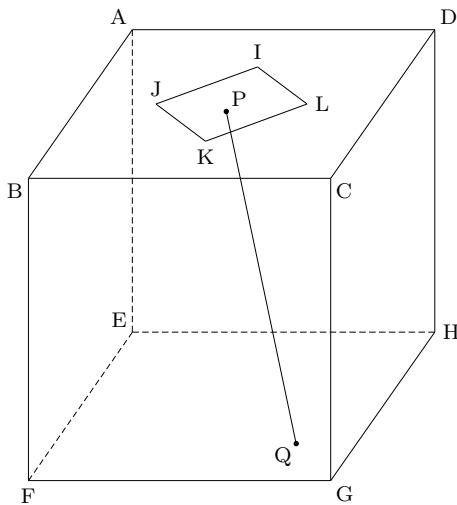


図2

- 3 2019 人の生徒が 5 問からなる試験を受けた。その結果、どの問題についても 888 人以上の生徒が正解していた。

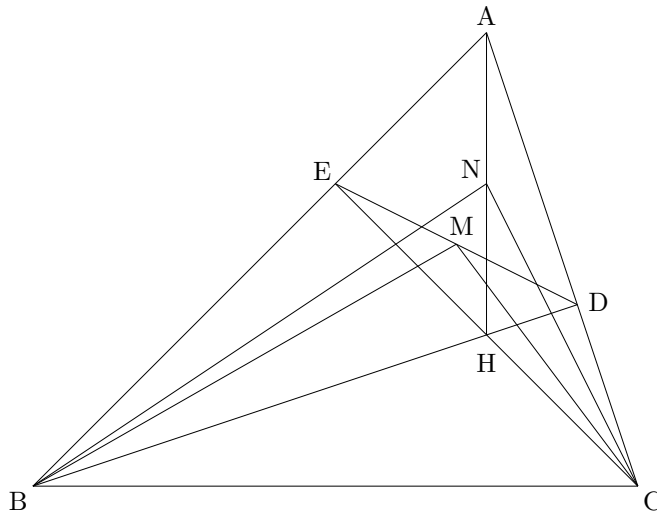
このとき、次の「条件」を満たす 3 人組が存在することを示しなさい。

条件

どの問題も、3 人のうち少なくとも 1 人が正解している。

- 4 図のように、鋭角三角形 ABC の頂点 B から辺 CA に下ろした垂線と辺 CA との交点を D 、頂点 C から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB との交点を E 、線分 DE の中点を M とする。また、線分 BD と線分 CE との交点を H とし、線分 AH の中点を N とする。

このとき、 $\angle BMC + \angle BNC = 180^\circ$ が成り立つことを示しなさい。



5 次の条件を満たす正の奇数の組 (a, b, c, d) を求めなさい。

$ab + cd$, $ac + bd$, $ad + bc$ がすべて 2 の累乗で表すことができる。

ただし, 2 の累乗で表すことができるとは, ある自然数 n を用いて 2^n と表すことができることをいう。