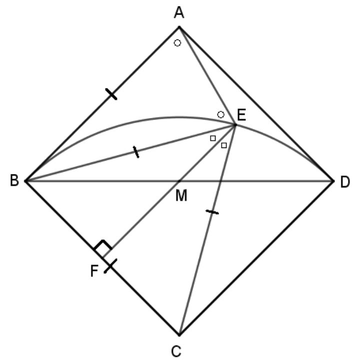
$\boxed{1}$

四角形 ABCD は正方形であり、M は BD の中点である。点 C を中心とする弧 BD 上に ME//CD となるように点 E をとる。このとき、∠AEM を求めよ。

（解法）

直線 ME と直線 BC の交点を F とすると、直線 EF は線分 BC の垂直二等分線となるから、 BE = CE である。また、BC、BE は弧 BD の半径であるから、BC = CE である。よって、BE = CE =BC であるから、△ BCE は正三角形である。したがって、∠BEF = 30° である。
また、∠EBC = 60°、∠ABC = 90° より ∠ABE = 30° である。AB = BC、BC = BE より、AB = BE であるから、△ ABE は二等辺三角形である。よって、∠AEB= (180° − 30°) ÷ 2 = 75° である。
したがって、∠AEM = ∠AEB + ∠BEF = 105°



$\boxed{2}$ （複比に関する問題）

【定義】　直線上または円周上の 4 点 A,B,C,D に対して

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}] = \frac{\mathrm{AC}/\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}/\mathrm{BD}} \qquad \left(= \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \div \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \times \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}} \quad \text{となります} \right)$$

で定まる実数を、4 点 A,B,C,D の「複比」という。ここで AC とは直線上では点 A と点 C の（向きを考慮した）距離を表し、円周上では弦の長さを表すものとする。（注意 : 向きを考慮しているので、例えば AC/CA = −1 となる。）
また、$[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}] = -1$ となる 4 点を「調和点列」という。

(1)　直線 l, m と l, m 上にない点 O があり、l 上の 4 点 A,B,C,D に対して、各々と O を結んだ直線と直線 m との交点をそれぞれ $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}'$ とする。このとき $[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}] = [\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']$ を示せ。

（解法 1）

点 B を通り、直線 OA と平行な直線と直線 OC、OD との交点をそれぞれ X，Y とする。OA//BX，OA//BY より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BX}}\ , \qquad \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BY}}$$

ゆえに、

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}] = \frac{\mathrm{AC}/\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}/\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AO}/\mathrm{BX}}{\mathrm{AO}/\mathrm{BY}} = \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BX}} \qquad (1)$$

同様に、点 B′ を通り、直線 OA と平行な直線と直線 OC、OD との交点をそれぞれ X′, Y′ とする。

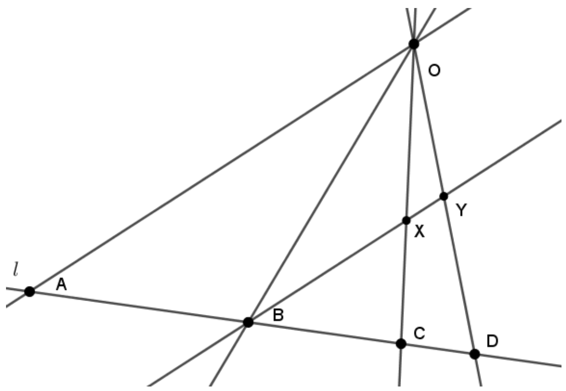
$$[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}'] = \frac{\mathrm{B'Y'}}{\mathrm{B'X'}} \qquad (2)$$

BY//B′Y′ より

$$\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BX}} = \frac{\mathrm{B'Y'}}{\mathrm{B'X'}} \qquad (3)$$

(1),(2),(3) より

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}] = [\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']$$

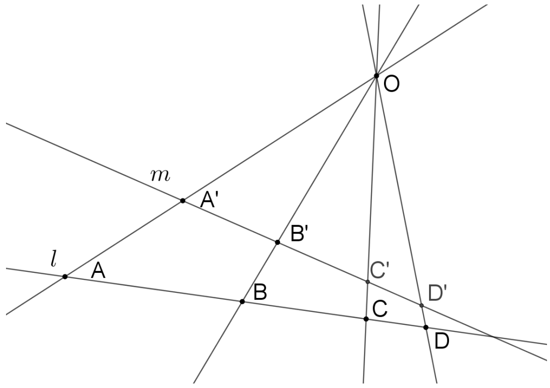


（解法 2）

例えば、△ OAB の面積を S_{OAB} とかくとすると

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\frac{S_{\mathrm{OAC}}}{S_{\mathrm{OBC}}}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\sin\mathrm{AOC}}{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin\mathrm{BOC}}$$

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{S_{\mathrm{OAD}}}{S_{\mathrm{OBD}}}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OD}\sin\mathrm{AOD}}{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}\sin\mathrm{BOD}}$$



よって

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}]=\frac{\mathrm{AC}/\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}/\mathrm{BD}}=\frac{\sin\mathrm{AOC}\cdot\sin\mathrm{BOD}}{\sin\mathrm{BOC}\cdot\sin\mathrm{AOD}}$$

同様に考えて

$$[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']=\frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'/\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{A}'\mathrm{D}'/\mathrm{B}'\mathrm{D}'}=\frac{\sin\mathrm{A}'\mathrm{OC}'\cdot\sin\mathrm{B}'\mathrm{OD}'}{\sin\mathrm{B}'\mathrm{OC}'\cdot\sin\mathrm{A}'\mathrm{OD}'}$$

であるが、題意より $[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}]=[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']$ は明らかである。

(2)　直線 l と円 O と円 O 上の点 P があり、l 上の 4 点 A,B,C,D に対して、各々と点 P を結んだ直線と円 O との交点をそれぞれ $\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}',\mathrm{D}'$ とする。このとき $[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}]=[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']$ を示せ。

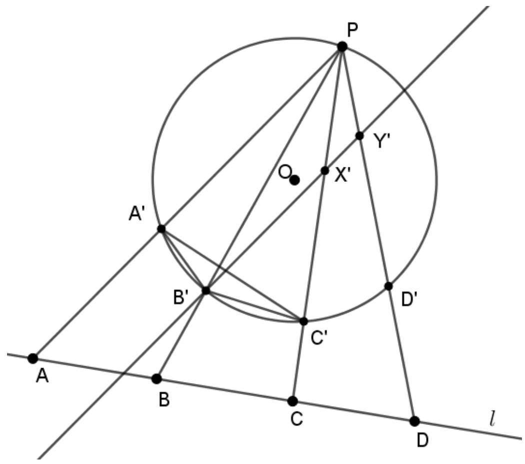
（解法 1）

点 B' を通り、直線 OA と平行な直線と直線 OC、OD との交点をそれぞれ X',Y' とする。円周角の定理より

$$\angle\mathrm{B}'\mathrm{PC}'=\angle\mathrm{B}'\mathrm{A}'\mathrm{C}'\quad,\qquad\angle\mathrm{A}'\mathrm{PB}'=\angle\mathrm{A}'\mathrm{C}'\mathrm{B}'$$

$\mathrm{A}'\mathrm{P}/\!/\mathrm{B}'\mathrm{X}'$ より

$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{PB}'=\angle\mathrm{PB}'\mathrm{X}'$$



以上より

$$\angle\mathrm{A}'\mathrm{C}'\mathrm{B}'=\angle\mathrm{PB}'\mathrm{X}'\quad,\qquad\angle\mathrm{B}'\mathrm{A}'\mathrm{C}'=\angle\mathrm{X}'\mathrm{PB}'$$

であるから、$\triangle\,\mathrm{A}'\mathrm{C}'\mathrm{B}'\backsim\triangle\ \mathrm{PB}'\mathrm{X}'$ である。よって

$$\frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}=\frac{\mathrm{PB}'}{\mathrm{B}'\mathrm{X}'}$$

また、点 D に対しても同様に考えると

$$\frac{\mathrm{A}'\mathrm{D}'}{\mathrm{B}'\mathrm{D}'}=\frac{\mathrm{PB}'}{\mathrm{B}'\mathrm{Y}'}$$

ゆえに

$$[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']=\frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'/\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{A}'\mathrm{D}'/\mathrm{B}'\mathrm{D}'}=\frac{\mathrm{PB}'/\mathrm{B}'\mathrm{X}'}{\mathrm{PB}'/\mathrm{B}'\mathrm{Y}'}=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{Y}'}{\mathrm{B}'\mathrm{X}'}$$

(1) の（解法 1）と同様にして、

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}]=[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']$$

（解法 2）

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}{\sin\mathrm{A}'\mathrm{PC}'}=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\sin\mathrm{B}'\mathrm{PC}'}=\frac{\mathrm{A}'\mathrm{D}'}{\sin\mathrm{A}'\mathrm{PD}'}=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{D}'}{\sin\mathrm{B}'\mathrm{PD}'}\qquad(=\text{円の直径})$$

よって

$$[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']=\frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'/\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{A}'\mathrm{D}'/\mathrm{B}'\mathrm{D}'}=\frac{\sin\mathrm{A}'\mathrm{PC}'\cdot\sin\mathrm{B}'\mathrm{PD}'}{\sin\mathrm{B}'\mathrm{PC}'\cdot\sin\mathrm{A}'\mathrm{PD}'}$$

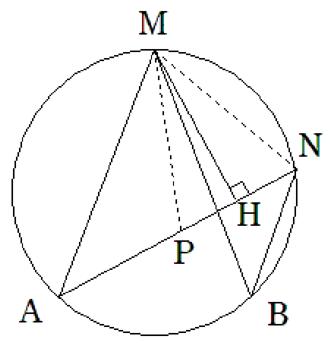
(1) の（解法 2）と同様にして $[\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathrm{C},\mathrm{D}]=[\mathrm{A}',\mathrm{B}':\mathrm{C}',\mathrm{D}']$ がいえる。

$\boxed{3}$

円周上の 3 点 A, M, B が AM = MB を満たしている。A を含まない弧 MB 上に点 N を、線分 AN 上に MH⊥AN となる点 H をとったとき、AH = HN + NB を証明せよ。

(解法 1)

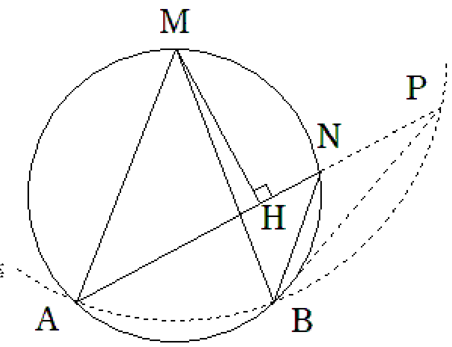
線分 AN 上に、AP = NB となる点 P を取る。△ MAP と△ MBN について



- 仮定より MA = MB
- 仮定より AP = NB
- 円周角の定理から ∠MAP=∠MAN=∠MBN

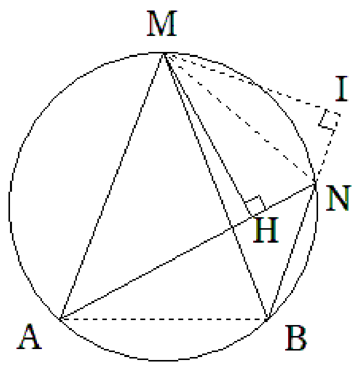
であるから、△ MAP ≡△ MBN である。したがって MP=MN
△ MPN は二等辺三角形であるから、MH は底辺 PN を二等分する。
よって PH = HN である。したがって AH = PH + AP = HN + NB

(解法 2)
AN の延長線上に、NP=BN となる点 P をとる。
△ NBP は二等辺三角形なので ∠NBP=∠NPB
三角形の外角はそれと隣り合わない内角の和に等しいので
∠ANB=∠NBP+∠NPB
円周角の定理より、∠AMB=∠ANB
したがって ∠AMB= 2∠NPB= 2∠APB
円周角の定理の逆から、P は M を中心とし A,B を通る円周上にある。
このとき AP は M を中心とする円の弦であるから、垂線 MH は AP を二等分する。よって AH = HP
以上から AH = HP = HN + NP = HN + NB



(解法 3)
辺 BN の延長線上に、MI ⊥ BN となる点 I をとる。△ MHN と△ MIN について

- MN = MN（共通）
- ∠MHN=∠MIN= 90°
- 等しい弧に対する円周角は等しいので ∠MNA=∠MAB
  MABN は円に内接する四角形なので ∠MNI=∠MAB
  よって ∠MNH=∠MNI



であるから、△ MHN ≡△ MIN である。したがって MH=MI
さらに、△ MAH と△ MBI について

- 仮定から MA = MB
- △ MHN ≡△ MIN から MH = MI
- 円周角の定理から ∠MAH=∠MAN=∠MBN=∠MBI

であるから、△ MAH ≡△ MBI である。
よって AH = BI である。したがって AH = BI = IN + NB = HN + NB

$\boxed{4}$

直線 l と l にない点 O があり、 l 上に相異なる 4 点 A,C,B,D がこの順にある。D を通り O を通らない別の直線 m があり、A,C,B と O を結んだ直線と m の交点をそれぞれ A', C', B' とする。さらに直線 $A'B$, $B'A$, $C'C$ は一点で交わるとする。このとき $AC : BC = AD : BD$ であることを示せ。

（解法１）

直線 $A'B$, $B'A$, $C'C$ の交点を P とする。

△ BAA' と直線 OC でメネラウスの定理を使用すると

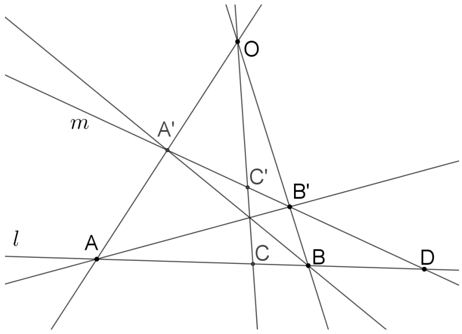
$$\frac{CA}{BC} \times \frac{OA'}{AO} \times \frac{PB}{A'P} = 1$$

△ ABO と直線 m でメネラウスの定理を使用すると

$$\frac{DB}{AD} \times \frac{B'O}{BB'} \times \frac{A'A}{OA'} = 1$$

△ $BA'O$ と直線 AB' でメネラウスの定理を使用すると

$$\frac{PA'}{BP} \times \frac{AO}{A'A} \times \frac{B'B}{OB'} = 1$$



これらを辺々かけあわせて

$$\frac{CA}{BC} \times \frac{OA'}{AO} \times \frac{PB}{A'P} \times \frac{DB}{AD} \times \frac{B'O}{BB'} \times \frac{A'A}{OA'} \times \frac{PA'}{BP} \times \frac{AO}{A'A} \times \frac{B'B}{OB'} = 1$$

整理して

$$\frac{CA}{BC} \times \frac{DB}{AD} = 1$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$$
$$AC : BC = AD : BD$$

（解法２）

点 O と点 A,B,C,D を結んだ直線は、直線 m とそれぞれ A', B', C', D で交わるので $\boxed{2}$ から

$$[A, B : C, D] = [A', B' : C', D]$$

直線 $A'B$, $B'A$, $C'C$ の交点 P と点 A', B', C', D を結んだ直線は、直線 l とそれぞれ B,A,C,D で交わるので $\boxed{2}$ から

$$[A', B' : C', D] = [B, A : C, D]$$

よって

$$[A, B : C, D] = [B, A : C, D]$$
$$\frac{AC/BC}{AD/BD} = \frac{BC/AC}{BD/AD}$$
$$\frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{AC} \div \frac{BD}{AD}$$
$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AD}{BD}\right)^2$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$
$$AC : BC = AD : BD$$