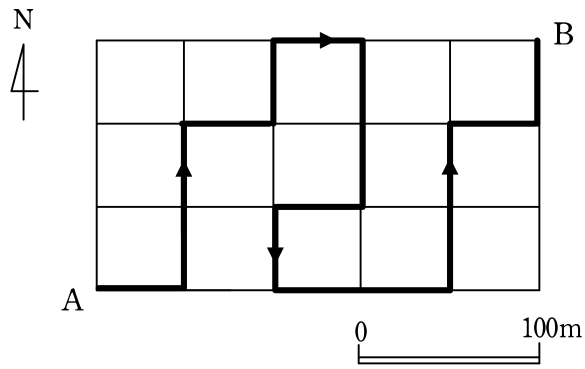
1 〔東京理科大学数学教育研究大会　理科大数学オリンピック第11回〕（改題）

下の図はある街路の地図である。いま，図の太線のように西南端の地点 A より東北端の B に至る道を考える。地図には 24 の交差点があるが，どの交差点も 1 回しか通らないものとする。道をいろいろにとったとき，道のりの最大値はいくらか。



（解説）

24 ある交差点のうち，始点と終点をふくめて N 個の交差点を通ったとする。

このとき，経路の長さは 50(N−1) [m]となる。

N＝23 となる経路は確かに存在する。例えば図 1 のような経路を取ればいい。

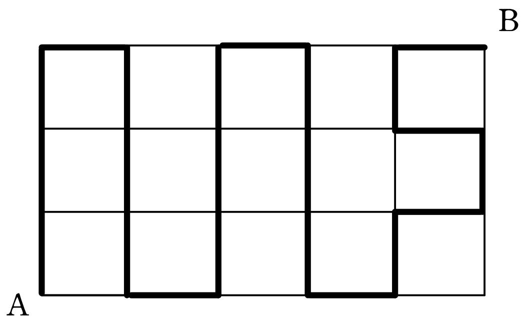
N＝24 となる経路を取ることができない，つまりすべての交差点を通ることができないことを示す。

図 2 のように，交差点を白と黒に塗り分ける。

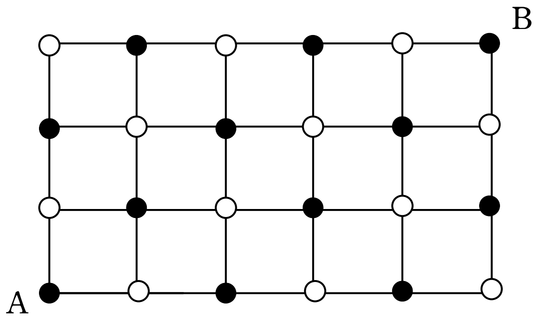
このとき，経路は黒の交差点と白の交差点を交互に通ることになる。

交差点は全部で偶数個（24個）であるから，もしもすべての交差点を通る経路が存在するならば，始点と終点の交差点の色は必ず異なる。しかし，図 2 において始点と終点の交差点の色は同じであるから，すべての交差点を通ることは不可能である。

以上から，経路の長さの最大値は 50×22＝1100 [m]　……（答え）

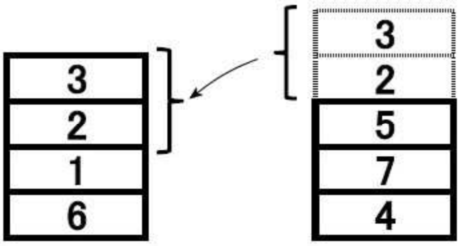


〔図１〕



〔図２〕

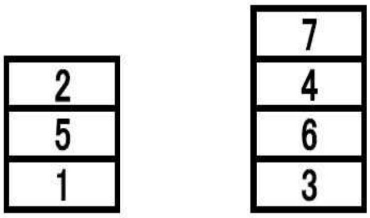
2　１から７ までの番号が１つずつ付けられた７個の積み木がある。 積み木は右と左の２つの場所にしか積み上げることができず，一方の積み木の上から１個または２個の積み木を他方の上に移動できることとする。ただし２個移動するときは，下の 図のように２個の上下関係を変えないものとする。



このとき， 最初に右側に上から １, ２, ⋯ , ７ という順で積まれている積み木を， 左側に上から １, ２, ⋯ , ７ という順に積みなおすためには，積み木の移動を最低何回行わなければならないか。

解説

下図のように積み木が積まれた状態を　152∗7463　と表すことにする。



また， 各操作による変化みると

１個動かす（以下　操作Ａ）：⋯□∗⋯　⇔　⋯∗□⋯　※　∗が左右に移動

２個動かす（以下　操作Ｂ）：⋯△×∗⋯　⇔　⋯∗×△⋯　※　∗が左右に2つ移動し, 動かした数の 並びが入れ替わる

以下， 初期状態　∗1234567　から　操作Ａ，Ｂを何回か行い，目標である 7654321∗になるまでの回数を数える.

解答 1

初期状態と目標状態を比べるとすべての数の並びが入れ替わっている。すなわち，１から７までの７個の数からどの２個を選んでも数の並びが入れ替わっていることになる。並びの入れ替えは操作Ｂでしか起こらないので，操作Ｂは少なくとも ${}_7C_2=21$ 回行わなければならない。

次に，操作Ｂを３回行ってから操作Ａを１回行う移動を「サイドへの移動」と呼ぶことにする。

初期状態：　∗1234567

サイドへの移動１回後：　2143657∗

サイドへの移動２回後：　∗2416375

サイドへの移動３回後：　4261735∗

サイドへの移動４回後：　∗4627153

サイドへの移動５回後：　6472513∗

サイドへの移動６回後：　∗6745231

サイドへの移動７回後：　7654321∗

このように「サイドへの移動」を７回つまり，操作Ｂを21回，操作Ａを７回の合計28回の移動を行えば，右から左に積み木を積みなおすことができる。

以下，これを確かめる．

「サイドへの移動」を奇数回後は

7番目は7番目に，また $2i$ 番目と $2i-1$ 番目が入れ替わる。

「サイドへの移動」を偶数回後は

1番目は1番目に，$2i$ 番目と $2i+1$ 番目が入れ替わる。

よって，最初 $2i+1$ 番目（$i=0,1,2,3$）だった積み木は $2(k-i)$ 回の移動の後7番目になり，その後1回移動せず，次に $2i$ 回の移動を行って $7-2i$ 番目になる．

また，最初 $2i$ 番目（$i=1,2,3$）だった積み木は $2(i-1)+1$ 回の移動の後1番目になり，その後1回移動せず，次に $7-i$ 回の移動を行って，$8-2i$ 番目になる．

したがって，j 番目だった積み木は $8-j$ 番目に移ることになり，また7回の「サイドへの移動」で積み木はすべて左に移っている。

以上から，求める移動回数は28回　……（答え）

$\boxed{\text{解答}}$２

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ となる置換を互換の積で表すとすると，

少なくとも ${}_7C_2=21$ 通りの互換が必要である。つまりＢの操作は少なくとも21回行わなければならない。

Ｂは連続して３回までしか行うことができないので，Ａは少なくとも $\dfrac{21}{3}-1=6$ 回行う必要がある。また，どの積み木も最終的に右から左に移動することになるので，各積み木の移動回数は奇数回であり，積み木の個数が奇数なので，移動回数の総和も奇数となる。

Ｂによって積み木が２個移動することと併せて考えると

（Ｂの回数）× 2 ＋（Ａの回数）＝（奇数）

よって，Ａの回数は奇数である。このことからＡは少なくとも７回行わなければならない．

実際，Ａの最低回数７回とＢの最低回数21回で積み木を移動させるには，Ｂを３回とＡを１回のセットを７セット行うとよい。

以上から，求める移動回数は28回　……（答え）

$\boxed{3}$ [2008 JMO予選 問題５]（改題）

3, 4, 5, 6, 7, 8 の数が書かれたカードが１枚ずつ，合計６枚ある．これらのカードを無作為に横一列に並べたとき，どの $i=1,2,3,4,5,6$ に対しても左から i 番目のカードに書かれた数が i 以上となる確率を求めよ．

解説

どの $i=1,2,3,4,5$ に対しても左から i 番目のカードに書かれた数が i 以上となる並べ方を考える。

まず，一番右，すなわち左から６番目 ($i=6$) には，6, 7, 8 のいずれかの数が書かれたカードが並べばよく，その場合の数は３通り。

次に，左から５番目 ($i=5$) には，5, 6, 7 のうちの一つで，６番目で使ったカード以外のカードが並べばよい，その場合の数は３通り。

左から４番目 ($i=4$) についても同様で，３通りの並べ方がある。

残りの左から 1, 2, 3 番目については，残り３枚のカードをどの順番で並べても条件を満たすので，その並べ方は $3!$ 通り。

６枚のカードの並べ方の総数は $6!=720$ 通りであるから，求める確率は，

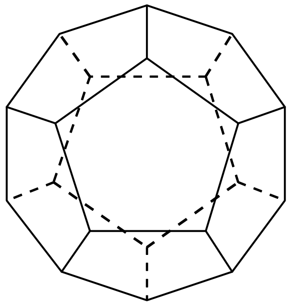
$$\frac{3^3\times 3!}{720}=\frac{9}{40}$$ ……（答え）

4 [2006　JMO予選　問題10]

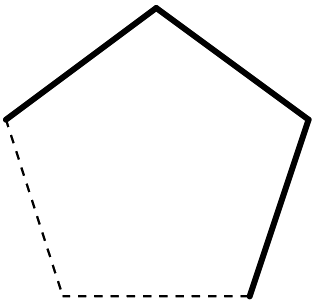
正十二面体のひとつの頂点 X をとる。一匹のアリが X を出発し，正十二面体の辺上のみを歩き，X 以外のすべての頂点をちょうど 1 度ずつ通過して，X に戻ってきた。アリの歩いた経路として考えられるものは何通りあるか。ただし，回転で重なりあうような経路や，道順が逆になっただけの経路も，異なるものとして数える。

解説

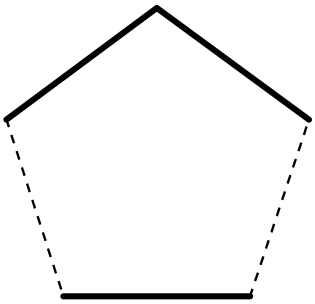
右図のように，正十二面体はすべての面が正五角形の立体である。ある面に注目し，条件を満たす経路がその面の 5 つの辺をどのように通るかを考える。



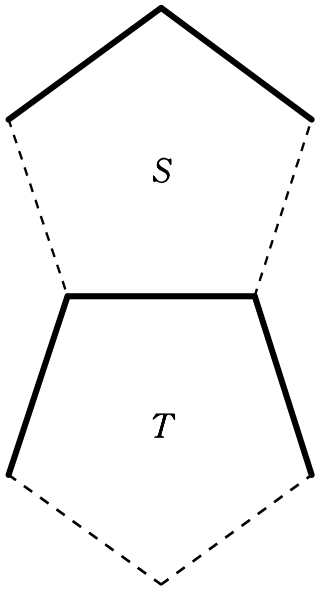
最初に，図 1 のように 5 つの辺のうち 4 つの辺を連続して通るような面が，少なくとも 1 つは存在することを示す。



〔図 1〕



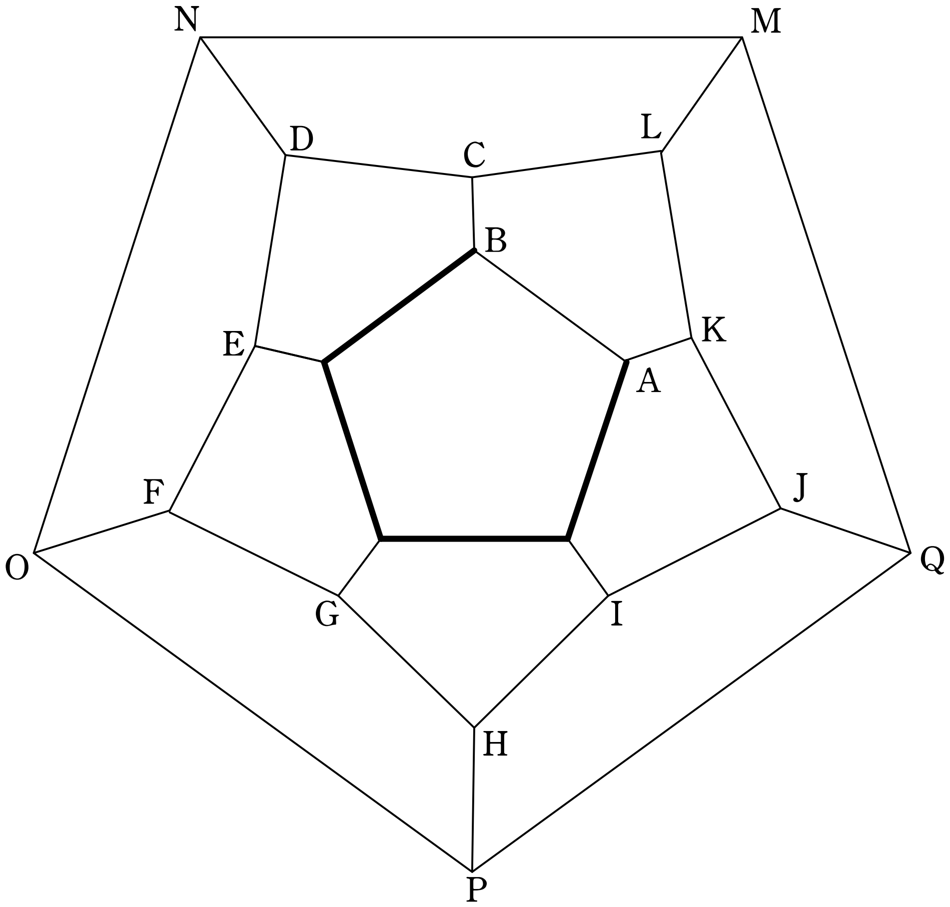
〔図 2〕



〔図 3〕

もしもどの面においても 4 辺を連続して通ることがないとすれば，すべての面を 図 2 のように通らなければならない。このとき，図 3 のように面 S と隣り合う面 T を考えると，面 T のすべての頂点をちょうど 1 度ずつ通過する経路は必ず面 T の 4 辺を連続して通ることになる。ゆえに，正十二面体の面のうち，4 辺を連続して通るような面が少なくとも 1 つは存在する。

さて，ある面の 4 辺を連続して通ったとし、その 4 辺の両端をA，B とする。条件を満たす経路を考える場合，正十二面体の各頂点間の距離について考える必要はなく，各頂点がどのように連結しているかについてのみ考えればよいから，正十二面体の頂点と辺の関係を次の図のように平面状に表して考える。また，A，B 以外の頂点を図のように C，D，E，…，Q とする。



A－B という道は経路上に存在し得ないので，B－C，A－K という道が経路上にある。また，すべての頂点をちょうど一度ずつ通らなければならないので，E，G，I は，それぞれ（順番をとりあえず無視すると）D－E－F，F－G－H，H－I－J という道で通らなければならない。同様の理由で，N－O－P－Q という道を通ることも確定する。ここからは，K－L－M－N，C－D，J－Q とつなぐか，C－L－M－Q，K－J，D－N とつなぐかの２通りがある。この２つの経路は，互いに裏返しの関係になっている。また，条件をみたすすべての経路は，このようにして得られる。

各面に対して，その面の 4 辺を連続して通る条件を満たす経路は，通らない辺の選び方が 5 通り，各々に対して 2 通りの作り方があるので，10 通りある。面の選び方は 12 通りあるが，条件を満たす経路は，ちょうど 4 つの面に対し，その 4 辺を連続して通るので，この数え方では同じ経路を 4 回数えている。

したがって，道順を含めて考えると、求める経路の数は $2 \times 10 \times 12 \div 4 = 60$ 通り……（答え）

5　１ から 12 までの異なる整数の書かれた 12 枚のカードがある。次の条件にしたがって，12 枚のカードを１列に並べる。

このとき，このようなカードの並べ方は例も含めて何通りあるか。

（条件）

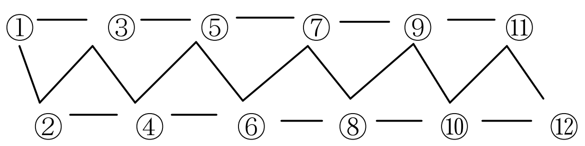
左端には必ず１と書かれたカードを置く。さらに，隣り合うカードに書かれてある数字の差を必ず２以下にする。

（例）

1，2，3，5，4，6，7，8，9，11，12，10

解説

＜解答例＞



「同じ道は通らずに、すべての番号を通る道順の問題」として考える。

さて、カードの枚数を少なくして“実験”してみると、

(1)　カード１枚　…　①　１通り

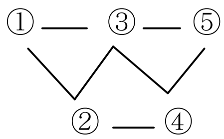
(2)　カード２枚　…　①→②　１通り

(3)　カード３枚　…　①→②→③、①→③→②　２通り

(4)　カード４枚　…　①→②→③→④、①→②→④→③

①→③→②→④、①→③→④→②　４通り

(5)　カード５枚　…



(ｱ)　①→②の順に通るとき

残りの道を取り出すと、実はカードを４枚並べるとき（＝カードを１枚少なくしたとき）とまったく同じ状況になる。※ 理由：②～⑤のカードの数字を①～④に置き換える。

よって、４通り

（1→2→3→4→5　1→2→3→5→4　1→2→4→3→5　1→2→4→5→3）

(ｲ)　①→③→②の順に通るとき。

次は④に進むしかない。残りの道を取り出すと、今度はカードを２枚並べるとき（カードを３枚少なくしたとき）とまったく同じ状況になる。

よって、１通り（1→3→2→4→5）

(ｳ)　(ｱ)、(ｲ)以外の通り方のとき

①→③→⑤の順に通ると、①→③→⑤→④→②　の１通り。

①→③→④の順に通ると、手詰まり。

（★）つまり、右上の番号と左下の番号の両方を通るために、ずっと右に進み上段の奇数をすべて通ってから、下段に下りてずっと左に進み、すべての偶数を通る道順しか実現不可能である。

以上から、

（カード５枚の並べ方）＝（カード４枚の並べ方）＋（カード２枚の並べ方）＋1

＝ ４＋１＋１＝６通り

(6)　カードが６枚以上のとき

（カード６枚の並べ方）＝（カード５枚の並べ方）＋（カード３枚の並べ方）＋1

＝６＋２＋１＝９通り

（カード７枚の並べ方）＝（カード６枚の並べ方）＋（カード４枚の並べ方）＋1

＝９＋４＋１＝１４通り

以下同様にして

（カードが８枚の並べ方）＝１４＋６＋１＝２１通り

（カードが９枚の並べ方）＝２１＋９＋１＝３１通り

（カードが10枚の並べ方）＝３１＋１４＋１＝４６通り

（カードが11枚の並べ方）＝４６＋２１＋１＝６８通り

（カードが12枚の並べ方）＝６８＋３１＋１＝１００通り

正解は、１００通り ……（答え）

6 〔2008　JMO　問題10〕

2008 人の男子と 2008 人の女子が集まってプレゼント交換をする。男子は花束を，女子はチョコレートをプレゼントとして用意し，円形に並べられた椅子に全員が内側を向いて座る。

このとき，「持っているプレゼントを全員同時に右隣の人に渡す」という動作を何回か繰り返すと，男子全員がチョコレートを，女子全員が花束を持っている状態になった。男子が座っている椅子の組合せとして考えられるものは何通りあるか。

(解説)

男子全員が花束を，女子全員がチョコレートを持っている状態を「元の状態」，男子全員がチョコレートを，女子全員が花束を持っている状態を「良い状態」と呼ぶことにする。

d 回の動作を繰り返したとき初めて良い状態になるとする。このとき，$2d$ 回の動作を繰り返したときに初めて元の状態に戻る。なぜなら，良い状態とは男女のプレゼントが逆になった配置であるので，配置を逆にすることを 2 回繰り返すと元の状態に戻ることは明らかであるし，また，$2d$ 回未満の d' 回で元の状態に戻るとすると，$|d-d'|\,(<d)$ 回の動作で元の状態と良い状態が移り変わることになってしまい矛盾するからである。

次に以下の補題を示す。

補題　a 回の動作を繰り返したとき初めて元の状態に戻るとする。このとき，b 回の動作を繰り返すことにより元の状態に戻るなら，b は a の倍数である。

証明　$b=ma+k$（m は非負整数，k は 0 以上で a より小さい整数）と表せる。また，ma 回の動作を行うと，a の動作をしたときのプレゼント配置と一致する。k が 1 以上であれば，a より少ない回数の動作で初めて元の状態に戻り，これは a の取り方に反する。ゆえに $k=0$。よって，示された。 終

上の結果より，d の偶数倍の回数の動作を繰り返したとき，元の状態になり，d の奇数倍の回数の動作を繰り返したとき，良い状態になる．また補題より，元の状態，良い状態になるのはこのときだけである。

男女合計で 4016 人なので 4016 回の動作をすると元の状態に戻る。よって，$2d$ は 4016の約数となり，d としてありうるのは 1，2，4，8，251，502，1004，2008 である．また，$d=1$ ならば動作を 251 回，$d=2$ ならば動作を 502 回，$d=4$ ならば動作を 1004 回，$d=8$ ならば動作を 2008 回繰り返しても良い状態になる。補題から導かれる結果より，$n=$ 251，502，1004，2008 となる座り方のうち，共通するものはないので，これらより動作を 251，502，1004，2008 回繰り返して良い状態になる座り方が何通りあるかを求めればよいことがわかる。

n を 251，502，1004，2008 として，動作を n 回繰り返すと良い状態になるような男子と女子の座り方を考える。ある並んで座っている n 人がそれぞれ男子であるか女子であるかを決めれば，この条件を満たすような座り方がただ一つに決まる（$\dfrac{4016}{n}$ が偶数であることに注意）。よって，各 n について 2^n 通りの座り方がある。

以上より，求める椅子の組み合わせは $2^{251}+2^{502}+2^{1004}+2^{2008}$ 通り ……（答え）