京都数学オリンピック道場　第１回

１．　1990　ＡＩＭＥ　問８

解答　図の左端の列の3個の的に注目し、それらが各々 n_1, n_2, n_3 $(1 \leqq n_1 < n_2 < n_3 \leqq 8)$ 回目に割られるとしよう。この n_1, n_2, n_3 の選び方の場合の数が ${}_8C_3$ である。次に中央の列の2個が割られるのが m_1, $m_2\,(m_1 < m_2)$ 回目とすると、この m_1, m_2 の選び方は $1, 2, \cdots, 8$ から n_1, n_2, n_3 を除いた5個の数字の中から選ぶので、${}_5C_2$ である。右端の列の3個の的を割る順序は以上より一意的に定まる。よって、求める答えは、

${}_8C_3 \times {}_5C_2 = \dfrac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 3!} = 560$ 通りである。

２．　1983　ＵＳＡＭＯ　問１

解答　6点のうちある2点以上が一致する確率は0なので無視してよい。これら6点の円順列は $5! = 120$ 通りあるが、6点がいずれの円順列をなす確率も等しく1/120である。2つの三角形ABCとDEFが交わらない円順列は、弧AB,BC,CAのいずれか1つの弧の中に3点D,E,Fがすべて含まれる場合に限る。3点A,B,Cの円順列が2通り、弧AB,BC,CAの中から1つ選ぶ方法が3通り、その弧の中にD,E,Fを並べる方法が $3! = 6$ 通りある。

よって求める答えは, $\dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$ である。

３．　2003　日本数学オリンピック予選　問８

（考え方1）

例

		1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目
$2 = 2^1$	2	→ $\boxed{1}$								
3=	3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$						
4=	4	→ 2	→ $\boxed{1}$							
$5 = 2^2$	5	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$				
6=	6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$					
7=	7	→ 8	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$					
$8 = 2^3$	8	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$						
9=	9	→ 10	→ 5	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$		
10=	10	→ 5	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$			
11=	11	→ 12	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$			
12=	12	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$				
13=	13	→ 14	→ 7	→ 8	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$			
14=	14	→ 7	→ 8	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$				
15=	15	→ 16	→ 8	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$				
$16 = 2^4$	16	→ 8	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$					
17=	17	→ 18	→ 9	→ 10	→ 5	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$
18=	18	→ 9	→ 10	→ 5	→ 6	→ 3	→ 4	→ 2	→ $\boxed{1}$	

京都数学オリンピック道場　第１回

試行の結果以下の点について予想できる。

① ３以上のすべての数で，最後の３つの数字は，４→２→１となる。

② 2^n（nが自然数）の場合は、n回目の操作を行ったあとに初めて1になる。

③ ２で割る操作が連続することはあるが，１を加える操作が連続することはない。

④ ２で割った商が奇数になると，１増えるが，２で割った商が偶数になると数が２分の１に減る。

＜仮説＞１から逆に考えていくと，「２倍が連続する」より「１引いて２倍する」ことを連続する方が操作の回数を増やすことができる。よって，「偶数なら１引く」，「奇数なら２倍」の操作を2003を越えるまで繰り返し行うとき，操作が最大となる。

1→2→4⟹3→6⟹5→10⟹9→18⟹17→34⟹33→66⟹65→130⟹129→258⟹257→514⟹513→1026⟹1025
→2050（2003を越えたので×）

ゆえに，求める数は，1025である。

（考え方２）

「2で割ること」，「1を加えること」を繰り返す操作は，２進法表現すると取り組みやすい。

例えば，17の場合

17→18→9→10→5→6→3→4→2→1

となるが，2進数表現では

10001→10010→1001→1010→101→110→11→100→10→1

のようになり，「2で割ること」は「1桁目を抹消すること」，「1 を加えること」は，「末尾の2桁の01→10にすること」と言い換えることができる。

例

		1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目
$2=2^1$	10→	$\boxed{1}$								
3=	11→	100→	10→	$\boxed{1}$						
$4=2^2$	100→	10→	$\boxed{1}$							
5=	101→	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$				
6=	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$					
7=	111→	1000→	100→	10→	$\boxed{1}$					
$8=2^3$	1000→	100→	10→	$\boxed{1}$						
9=	1001→	1010→	101→	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$		
10=	1010→	101→	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$			
11=	1011→	1100→	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$			
12=	1100→	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$				
13=	1101→	1110→	111→	1000→	100→	10→	$\boxed{1}$			
14=	1110→	111→	1000→	100→	10→	$\boxed{1}$				
15=	1111→	10000→	1000→	100→	10→	$\boxed{1}$				
$16=2^4$	10000→	1000→	100→	10→	$\boxed{1}$					
17=	10001→	10010→	1001→	1010→	101→	110→	11→	100→	10→	$\boxed{1}$

京都数学オリンピック道場　第１回

このとき，２以上の整数mに対して，この操作を繰り返し行ったとき，$k=k_m$回目の操作を行ったあとに初めて１になるとする。

$k_{2i}=k_{2i-1}-1$（iは２以上の整数）

が成立するから，奇数qにおける操作を行う回数が最大値をとりうる。

$k_q=$（ｑの２進数表示での桁数）＋（ｑの２進数表示に現れる０の個数）＋１　となる。（＊）

ここで，$2^{10}\leqq 2003<2^{11}$より この操作を一番多く行うのは２進数表示で10000000001 となるときである。

よって， $m=2^{10}+1=1025$ となる。

（解答）（＊）

２以上の整数mに対して，この操作を繰り返し行ったとき，$k=k_m$回目の操作を行ったあとに初めて１になるとする。

定義から，次の式が成立する。

$k_2=1$　　$k_{2i-1}=k_{2i}+1$（iは２以上の整数）　　$k_{2i}=k_i+1$　（iは２以上の整数）

この式を利用して，２以上の整数mに対して，k_mの値を具体的に求めよう。

$m=2^eq$（eは0以上の整数，qは奇数）と表すことができる。$k_{2i}=k_i+1$なので，$q=1$のとき，

$k_{2^e}=e$，$q\geqq 3$のとき，$k_{2^eq}=k_q+e$である。よって，３以上の奇数qに対して，k_qを求めればよい。

> 補題　qを３以上の奇数とする。qの２進数表示の桁数をd_qとし，qの２進数表示に現れる0の数をz_qとする。
>
> このとき，$k_q=d_q+z_q+1$が成立する。

（証明）$q+1=2^e$（eは２以上の整数）の場合，$d_q=e$，$z_q=0$，$k_q=k_{2^e-1}=k_{2^e}+1=e+1$なので，確かに等号は成立する。

一般の３以上の奇数qに対して，数学的帰納法により等号成立を示す。

$q\geqq 5$とし，３以上q未満の奇数に対しては等号が成立すると仮定する。

$q+1=2^e$（eは２以上の整数）の場合には等号が成立するので，

$q+1=2^er$（eは１以上の整数，rは３以上の奇数）の場合を考える。

$k_q=k_{2^er-1}=k_{2^er}+1=k_r+e+1$である。

$q=\dfrac{2q}{2}>\dfrac{q+1}{2}=\dfrac{2^er}{2}\geqq r$なので，$r$は$q$よりも真に小さい。よって，帰納法の仮定より$k_r=d_r+z_r+1$である。

qは，2^e-1の形をしていないので，qと$q+1$の２進数表示における桁数は一致する。

$r=\dfrac{q+1}{2^e}$なので，$d_r=d_q-e$である。

$q+1$は２でちょうどe回だけ割り切れるので，$q+1$の２進数表示の下$e+1$桁は，100･･･00（0がe個）である。

よって，qの２進数表示の下$e+1$桁は，011･･･11（1がe個）であり，それ以外の桁では$q+1$とqの２進数表示は一致する。

rの２進数表示は，$q+1$の２進数表示の下e桁の00･･･00（0がe個）を取り除いたものなので，

$z_r=z_q-1$である。

以上をまとめると，　$k_q=k_{2^er-1}=k_r+e+1=(d_r+z_r+1)+e+1$

$$=\{(d_q-e)+(z_q-1)+1\}+e+1=d_q+z_q+1$$

さて，$k_2=1<k_3=3$，$k_{2i}=k_{2i-1}-1$（$i=2, 3\cdots,1001$）より，k_mの最大値を実現するmは奇数であることがわかる。mを３以上2003以下の奇数とする。d_mの最大値は11であり，また，mの２進数表示の最上位と最下位の桁は１が入るので，z_mの最大値は９である。これらを同時に与える３以上2003以下の奇数は$m=2^{10}+1=1025$のみである。

４．

解答

８回のの操作を２回ずつに区切って考える。

ＡＡ，ＢＢ‥‥‥ 変化なし（これらの操作をそれぞれS_1，S_2とおく）

ＡＢ　　　‥‥‥ 反時計回りに90°の回転（この操作をＬとおく）

ＢＡ　　　‥‥‥ 時計回りに90°の回転（この操作をＲとおく）

$\{S_1, S_2, L, R\}$の中から４回の操作を行えばよいが，初期状態と終了状態が一致していることから

① 「Ｌが４回」または「Ｒが４回」

② 「Ｌが１回かつＲが１回」かつ「S_1またはS_2が２回」

③ 「Ｌが２回かつＲが２回」

④ 「S_1またはS_2が４回」

の４つの場合がある。

①は２通り，②は${}_4C_2\cdot2\cdot2^2=48$通り　③は${}_4C_2=6$通り　④は$2^4=16$通り

よって，$2+48+6+16=72$通り