先月の解答・解説

2020 年 12 月の問題

1201 を 2 乗すると 1442401 で、

「1」「2」「0」「1」が順番通りに現れます。

371 を 2 乗すると 137641 で、

「3」「7」「1」が順番通りに現れます。

(1) このような条件を満たす自然数を，ほかにも見つけてください。

(2) 101, 1001, 10001, …　は全てこの条件を満たすので、

この条件を満たす自然数は無数に存在します。

このような，条件を満たす数をいくらでも見つけられる数列を

他にも見つけてください。

解説

かなり自由度の高い問題にしてみました。

洛北高校では 2020 年 12 月に「洛北数学探究チャレンジ」というイベントが行われ、数学の探究活動を行いました。自分でテーマを決めて探究活動をするとき、このような自由度の高い問題が足掛かりになることが多いです。例えば 1201 までの数で条件を満たすのは

1, 5, 6, 10, 11, 25, 50, 60, 76, 95, 96, 100, 101, 105, 110, 125, 205, 250, 305, 371, 376, 405, 441, 500, 501, 505, 506, 525, 600, 601, 605, 625, 676, 705, 756, 760, 805, 825, 826, 905, 946, 950, 960, 976, 995, 996, 1000, 1001, 1005, 1006, 1010, 1011, 1021, 1025, 1026, 1036, 1046, 1050, 1100, 1101, 1105, 1201

の 62 個となり[1]（これが（1)の答えになります)、このままだとかなり煩雑としています。

ここから数学的になにかを得ようとするなら、いくつかを取り出して考えるといいでしょう。

例えば「1, 10, 100, 1000」の 4 つが上の数列に含まれているので、次のような手順で考察することができます。これはとても簡単な例なので、証明も一瞬ですね。

観察 1, 10, 100, 1000が 上の数列に入っている	➡	予想 10000, 100000,…も 上の数列に入っている	➡	証明する

では、他の場合を見つけてみましょう。たとえば、こんな部分列を取り出すことができます。

	観察		予想
①	5, 50, 500	→	5000, 50000, 500000, ⋯
②	6, 60, 600	→	6000, 60000, 600000, ⋯
③	1, 11, 101, 1001	→	10001, 100001, 1000001, ⋯
④	5, 25, 525	→	2525, 52525, 252525, ⋯
⑤	25, 125, 1025	→	10025, 100025, 1000025, ⋯
⑥	5, 95, 995	→	9995, 99995, 999995, ⋯
⑦	6, 96, 996	→	9996, 99996, 999996, ⋯

①や②は先ほどの「1, 10, 100, 1000」の例と全く同じように証明できます。他も、実際に 2 乗するとパターンが見えてきます。たとえば

$$2525^2 = 6375625$$

$$1000025^2 = 1000050000625$$

$$99995^2 = 9999000025$$

などです。④は成り立ちませんが、他の予想についてはすべて当たっていることがわかりました。

[1] オンライン整数列大辞典の A052212

①②③⑤は 0 を増やすだけなので、ある意味当たり前ですね。⑥⑦は少し高度な話という気がします。
もっと高度な話ができないでしょうか？

たとえば、1001 や 1101、1011 など 1 と 0 で作られる数字はどうでしょう。これを上手く使えばもう少し複雑な数を考えられそうです。
いろいろ調べてみると、こんな結果が出ました。

0 と 1 のみで作る数字を 2 乗したとき、不規則に並べたほうが 1 が出てきやすい。

```
       10001011
      ×10001011
       10001011
      10001011
    10001011
10001011
100020221022121
```

```
      1010101
     ×1010101
      1010101
    1010101
  1010101
1010101
1020304030201
```

0 と 1 をバラバラに並べた数：
桁がバラバラなので 2 乗すると 1 が多い

0 と 1 を規則的に並べた数：
桁が揃うので 2 乗すると 1 が少ない

これを使えば、たとえば

1, 11, 1011, 10001011, 1000000010001011, 10000000000000001000000010001011, ⋯

のような数列を作れます（n 番目の数は、$1 + 10 + 10^3 + 10^7 + \cdots + 10^{2^{n-1}-1}$）。

他にも、洛北算額の 2020 年 7 月の問題に出てくる数列

5, 25, 625, 0625, 90625, 890625, 2890625, ⋯
6, 76, 376, 9376, 09376, 109376, 7109376, ⋯

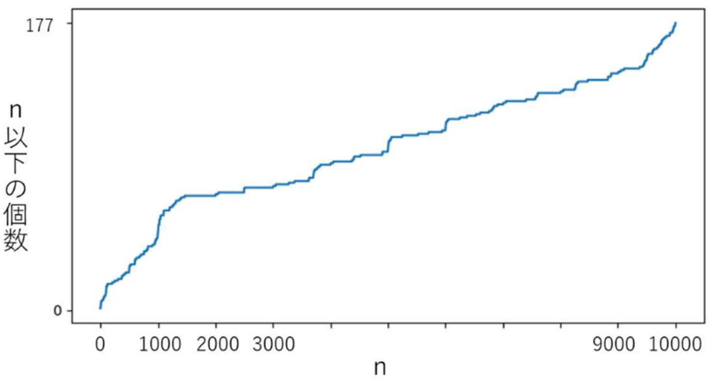
は条件を満たします。実際に二乗してみると、

$$7109376^2 = 5054322\overline{7109376}$$

のように末尾に同じ数列が表れるからです。

今回のようなアバウトなテーマから、いろいろな探究活動をすることができます。
他の場合について、ぜひいろいろ調べてみてください。

さて、コンピュータを用いてこの問題について調べてみます。コンピュータを使って計算するとき、最初に興味がわくのは「このような数がどのくらいの頻度で現れるか？」です。



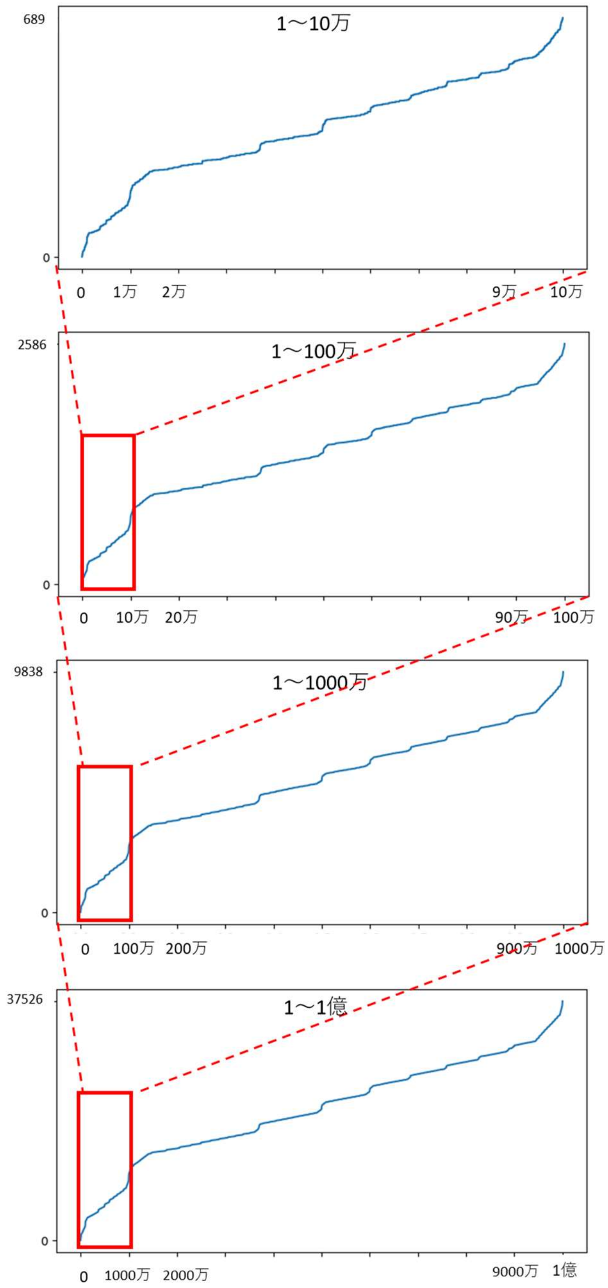
10000 以下の n について、「n 以下で条件を満たす数の個数」を調べてグラフにすると、右のようになりました。

このグラフから、n が 1 から 1000 までの範囲では算額数がたくさんあることや，2000 から 3000 までにはあまり無いことが見えてきます。9000 から 10000 までの範囲にもけっこうありますね。

さらに、n が 10 万以下、100 万以下、…　で調べてみます。すると面白い事が見えてきました。図のように、10 倍したときにほぼ同じ形のグラフが表れるのです。

つまりこのグラフが自己相似の構造（自分自身の一部分と相似である構造）を持っていると言えます。

とても不思議ですよね。理由は見当がつく[2]のですが、厳密な証明はできませんでした。この問題には個人的にじっくり取り組もうと思います。



[2] そもそも 10 進法というのが自己相似の構造を持っており、それが効いているはずです。