パスカルの三角形

1　授業の目的

- パスカルの三角形を用いて、合同式とフラクタルについての理解を深める。
- 課題研究に向けて、課題を発見する能力を育成する。

2　解説

これは平成 30 年にサイエンスⅠの授業で行ったもので「パスカルの三角形を題材にテーマづくりを学ぶ」ことを主目的とし、合同式やフラクタルのほかにパスカルの三角形について雑多なトピックを紹介した。

3　対象生徒

本校中高一貫コースの生徒 26 または 27 名に対して、3 回行った。

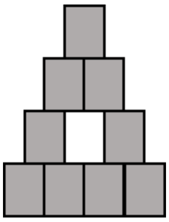
4〜5 名の班に分割し、それぞれで作業させている。

4　単元指導略案

1 時間目	● パスカルの三角形の復習 ● mod2 での塗り分けと解説 ● mod3，mod5 での塗り分け（班ごと）
2 時間目	● mod4，mod6 での塗り分け（班ごと） ● パスカルの三角形に関するその他のトピックの紹介
3 時間目	● セレンディピティ・セミナー １，２時間目に設定・考察した課題について、そこから発展させた考察のしやすいテーマと仮説を班ごとに考えさせた。
4 時間目	● 3 時間目に設定したテーマについて実験、考察

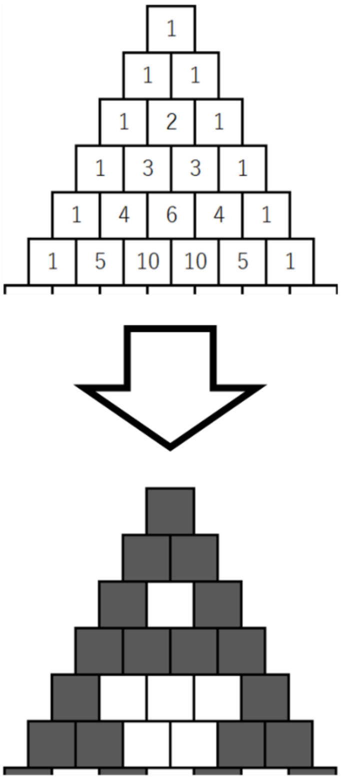
5　指導案

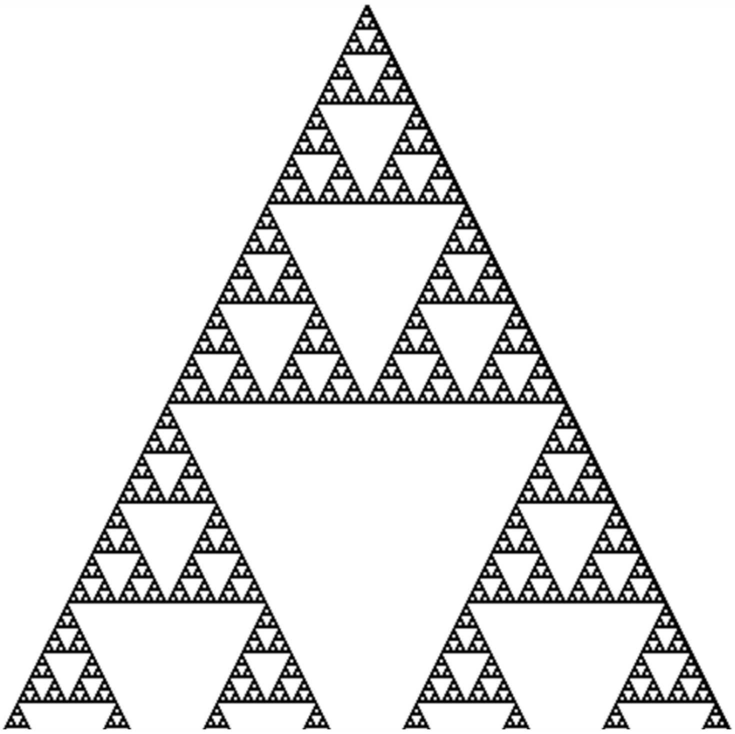
［１時間目：話題提供］

導入 （5 分）	・　この授業の目的の確認 ・　パスカルの三角形についての復習 ・　プリントの配布（16 段）
展開１ （5 分）	・　パスカルの三角形の０～７段目について、数字を記入させる。 ・　パスカルの三角形の性質（上２つの数の合計が下になる）を確認
展開２ （5 分）	・　プリントの配布（32 段） ・　パスカルの三角形の０～１５段目について、 　　mod2 で 0 となる数字は白 　　mod2 で 1 となる数字は黒　　　に塗り分けさせる。 ・　mod 2 での計算 $\begin{cases} 0+0\equiv 0 \\ 0+1\equiv 1 \\ 1+0\equiv 1 \\ 1+1\equiv 0 \end{cases}$ が有効であることを確認 ・　自己相似（フラクタル）の構造が現れていることを確認
展開３ （10 分）	・　０～３１段目までの塗り分けをさせる。 ・　生徒のプリントのうち完成したものを 9 枚集め、 　１２８段の三角形を作る。 　これによりフラクタルへの理解を深める。 
展開４ （15 分～ 20 分）	・　生徒を班に分け、班ごとにプリントの配布（32 段） ・　半数の班が mod3，半数の班が mod5 での塗り分けをするよう指示 　（色ペンを持ってくるよう事前に指示しておくと良い）

数学Ⅰと数学Ⅱで学習したパスカルの三角形について復習し、パスカルの三角形が多項式$(x+1)^n$を展開したときの係数を並べたものであること、二項係数であること、右上と左

上の数字を足したものであることを確認した。また、パスカルの三角形の各数字を mod２で塗りわけさせた。つまり異なる２つの色を用いて、偶数と奇数のマスを塗りわけさせた。





［２時間目：実験１・話題提供］

１時間目に引き続いてパスカルの三角形を mod４と mod６で塗りわけさせた。
塗る前にどのような形になるか仮説を立てさせたところ、半数程度の生徒が mod２, mod３, mod５と同様の規則が現れると予想した。しかし残りの生徒は、（こちらが素数と合成数を分けて扱ったのを感じ取ったのか）何か別の規則が現れるだろうと予測した。

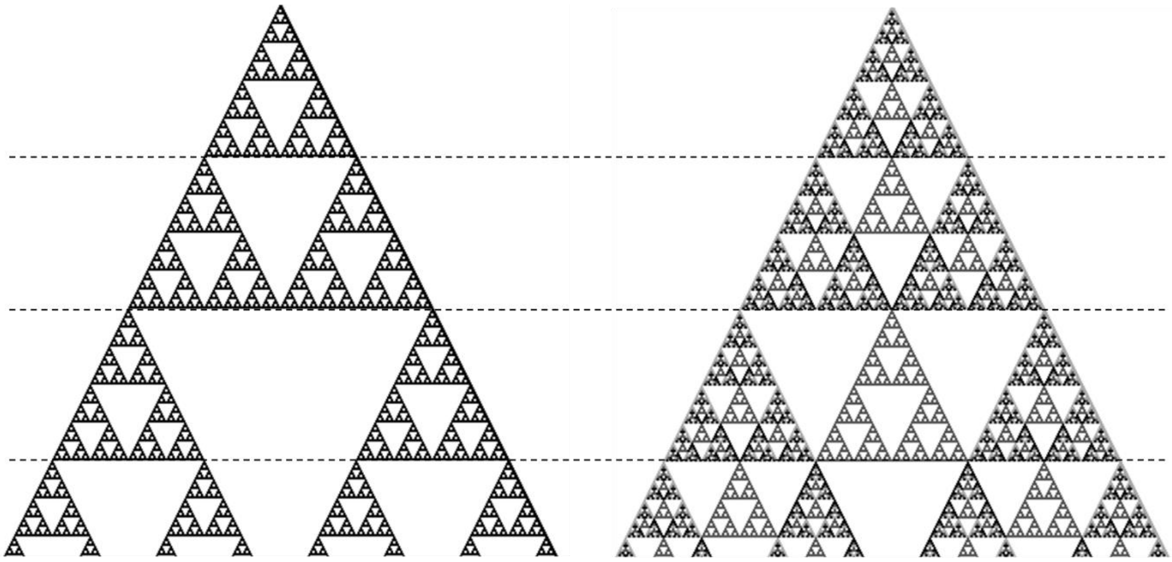


図４　mod４での塗りわけ（右）は、mod２での塗りわけ（左）と似た構造を持つ

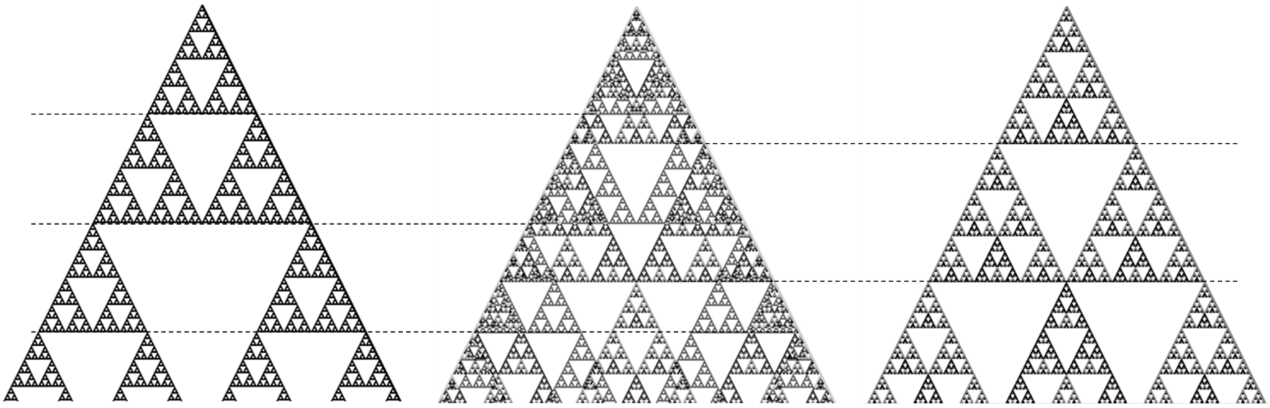


図５　mod６での塗りわけ（中央）は、mod２での塗りわけ（左）とmod３での塗り分け（右）をあわせた構造を持つため、自己相似の性質を持たない

実際、mod４で０となる場所（白い場所）は mod２でも０であり、mod２で黒く塗られた場所は mod４でも色を塗る必要があるため、mod２と同様の構造が現れる。mod4 での塗りわけは自己相似の性質を持つ（図４）。

mod６での塗りわけは、mod２と mod３のどちらかで色を塗った部分をすべて塗らないといけないので、自己相似の構造は現れない（図５）。

塗りわけた結果について班で議論させた結果、mod６の塗りわけが mod２と mod３の塗りわけをあわせた構造になっていることはどの班も短時間でたどり着いた。

それぞれの塗りわけはＡ３判の普通紙に行ったため、mod２と mod３の紙を重ねて光に透かすことで mod６の塗りわけと同じものを得ることができる。

平成 29 年度のときと同じく「解決済みのテーマを少し変えることで新しいテーマが作れる」ことを紹介するため、$(x+2)^n$を用いたパスカルの三角形について扱った。

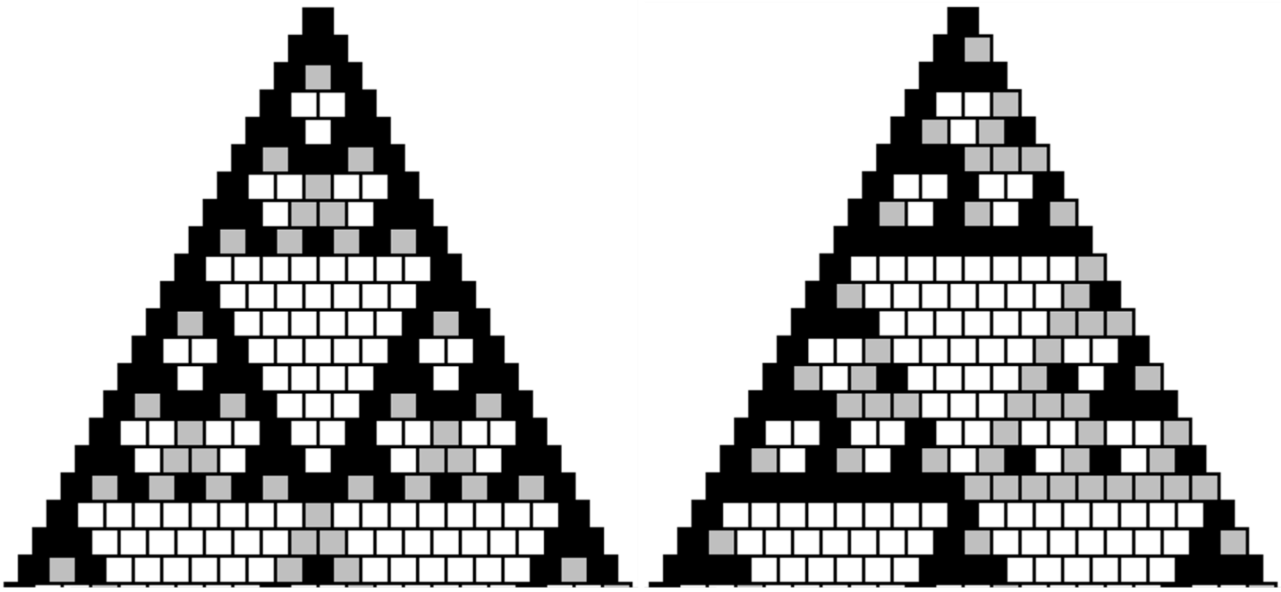


図６　通常のパスカルの三角形のmod３での塗りわけ（左）と
$(x+2)^n$ を用いたパスカルの三角形のmod３での塗りわけ（右）

$(x+1)^n$の展開から作れる通常のパスカルの三角形と、$(x+2)^n$から作る三角形を mod３で塗りわけると、似た構造が現れる（図６）。特に mod３で１である場所と２である場所を両方塗ったとき、両者は同じになる。

その他テーマづくりに役立てるため、通常のパスカルの三角形について各列の合計を計算すると2^nが現れること、ナナメ方向に足すとフィボナッチ数列が現れることなどを紹介した。

［３時間目…セレンディピティ・セミナー］

１，２時間目に設定・考察した課題について、考察のしやすいテーマと仮説を班ごとに考えさせた。

テーマを作りを目的とした題材なので、前年度の「球の近似」よりもスムーズにたくさんのテーマが出た。以下に例を挙げる。

- パスカルの三角形を mod８，mod16，…で塗りわけるとどうなるか
- $(2x+1)^n$や$(x-1)^n$を用いてパスカルの三角形を作るとどうなるか
- パスカルの三角形を三角錐に拡張するとどうなるか
- $(x+2)^n$のパスカルの三角形を mod５で塗りわけると、$(x+1)^n$と比較して色はどうなるか

特に最後のテーマについては、1，2時間目に紹介した話題の構造を見抜いたうえで非自明と思われる例をうまく見つけてきてくれた。生徒によっては簡単に結果や背後の構造が理解できてしまうため、簡単な題材だとテーマを見つけるのは難しいということもわかった。

［4時間目…実験2］

前時に作った仮説を班ごとに検証した。当初の思惑通り比較的短時間で実験が終わったため、考察及びまとめの時間を多くとることができた。

［その後に生徒が考えたテーマ］

その後のミニ課題研究（表1②）でパスカルの三角形をテーマにした生徒はあまりいなかった。ミニ課題研究では全員が数学分野を選ぶわけではないので、数学を選択するくらい数学力のある生徒はこの題材からテーマを見つけるのが難しかったのだと推測される。