

令和元年度洛北数学探究チャレンジ 実施報告

1. 概要
2. 問題と解説
3. 入賞したレポート
4. 総括

1. 概要

以下の通り実施した。

- ア 事業名 洛北数学探究チャレンジ
- イ 実施年月日 令和元年 12 月 22 日
- ウ 実施場所 京都府立洛北高等学校
- エ 参加人数 71 名 22 チーム（1 チーム 2 名から 4 名）
高等学校 42 名 13 チーム
（府立 7 チーム、京都市立 1 チーム、私立 5 チーム）
中学校 29 名 9 チーム
（府立 7 チーム、京都市立 2 チーム）
- オ 事業の概要 単純ではあるが拡張性の高い問題を与え、課題を設定させ、数理モデルを作成させる。数学の知識と深い理解、柔軟な発想を経て、探究という観点を通して課題解決し、優れた成果を導き出したチームを表彰するもの。
- カ 当日の日程
- | | |
|--------------|-------------|
| 模擬授業、出題 | 9:00～10:30 |
| グループディスカッション | 10:30～12:15 |
| グループ発表（希望者） | 13:00～14:00 |
| 解説・表彰 | 14:00～15:30 |
- カ 主 催 洛北数学探究チャレンジ実行委員会
京都府立洛北高等学校・附属中学校
- キ 後 援 京都府教育委員会
京都府高等学校数学研究会
京都府立高等学校数学研究会

2. 問題と解説

以下の問題を出題した。

問：自分たちでオリジナルの記数法を作って、その性質を考察してください。

数学 A では「 n 進法」を学習し、数を表す方法が 10 進法のほかにもあることを学ぶ。我々の生活には算用数字のほかに漢数字やローマ数字など様々な数を表す方法があり、これらを記数法と呼ぶ。

また、数学 A で学習するのは n 進法のみであるが、ローマ数字や硬貨などは二五進法を採用しており、底が一定でないような位取り記数法も存在する。

この数を何と表現する？

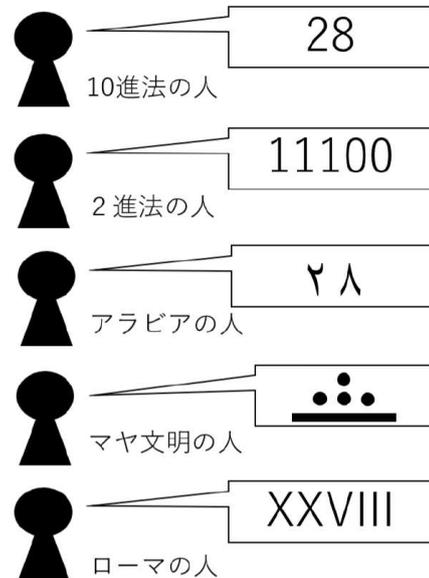


図 1: さまざまな人

すべての記数法には長所と短所があり、例えば 2 進法は 0 と 1 しか数字を使わないため 10 進法の掛け算とは違って九九を覚える必要がない長所があるが、10 進法に比べて桁が大きくなるという短所がある。

今回の問題は、各グループで記数法を自作し、その性質、および長所と短所について考察させるものである。

また、今回の問題では記数法を「表記からどのような数を表すか再現できるもの」としたので、すべての自然数を表せなくても記数法と呼ぶことにした。

出題に当たっては、以下の記数法を例として紹介した。

- 10進法

- 2進法

- 二五進法

底が一定でなく、2と5を交互に繰り返すもの。

ローマ数字やそろばん、日本の硬貨などが採用している。

- 1進法

桁が存在せず、1, 2, 3, ...を○, ○○, ○○○, ...と表すもの。

- モーザーの多角形表記

ユゴー・スタインハウスによって考案された多角形表記を、後にレオ・モーザーが拡張

したもの。例えば $\boxed{4}$ はおよそ $10^{10^{10^{2.79}}}$ となり非常に大きい数を表すことが可能だが、

すべての自然数を表すことは不可能である。

- 教員が自作した例

3. 入賞したレポート

令和元年度は、最優秀賞1チーム、優秀賞2チームを選出した。

優秀賞のうち1チームは中学生であり、中高の区別なく良いディスカッションができたものと思われる。

ア 最優秀賞 (チーム番号4)

演算の繰り返しにより大きい数を表記するもの。

整数 a, b, n ($a \geq 0, b \geq 2, n \geq 1$) に対して、次のように定義される。

$$a \overset{1}{b} = a + b$$
$$a \overset{n+1}{b} = \begin{cases} a \left(a \overset{n}{b-1} \right) & (b > 2, n \geq 1) \\ a \overset{n}{a} & (b = 2, n \geq 1) \end{cases}$$

これはハイパー演算子 $a^{\textcircled{n}}b$ と同一のものであり、 $n=2$ のときは $a \times b$ 、 $n=3$ のときは a^b に対応する。 n を大きくすることで巨大な数を表記することが可能であり、出題時に例として出したモーザーの多角形表記との比較もレポートで行っていた。

レポートではこれを $b=1$ のときも同様に定義したいと述べられており、実際のハイパー演算子も0以上の整数 a, b, n に対して定義されている。

イ 優秀賞 (チーム番号19)

素数を順に a, b, c, \dots として、素因数分解を用いて数を表記するもの。1は1と記す。

十進法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
作成した記数法	1	a	b	a^a	c	ab	d	a^{a^a} (注)	b^a	ac	$a^a c^a$

(注)正しくは a^b だが、レポートにはこう記されていた

このグループだけでなく、多くの参加者が素因数分解を用いた記数法を考察した。その中で考察をしっかりと行ったこのグループが優秀賞となった。

考察は「この記数法のメリット」「デメリット」「10進法との比較」の3つに分けて行われており、足し算・引き算が不便であることなどがしっかり述べられていた。

$z(=101)$ より大きい素因数を含む数については述べられていなかった。

ウ 優秀賞 (チーム番号14)

素数を順にA,B,C,...として、アルファベットの小文字と色によって演算をあらわすもの。

	例
1文字のもの	A=2 B=3 C=5
和	AB=5 BC=8
積 (小文字を用いる)	Ab=6 (Ab) _a =12
差 (文字を赤くする)	$B \overset{\text{A}}{\underset{\text{赤文字}}{\downarrow}} = 1$
商 (文字を青くする)	$B \overset{\text{A}}{\underset{\text{青文字}}{\downarrow}} = 3/2$

先ほどのグループと同様に素因数分解を用いた表記だが、大きい数字を表すときに無理が生じることはレポートに記されていた。他のメリットやデメリットについても考察がなされていた。

4. 総括

多くの中高生が参加し、イベントの第1回として大きな成果を出したと考える。

参加者に行ったアンケートでは、イベントの内容と他の班の発表に関して興味を持てたという声が多かった。

	A:非常によくあてはまる	B:あてはまる	C:あまりあてはまらない	D:まったくあてはまらない
内容がよく理解できた	34 (49%)	33 (47%)	3 (4%)	0
内容に興味を持てた	52 (74%)	17 (24%)	1 (1%)	0
主体性が高まった	40 (57%)	27 (39%)	3 (4%)	0
他の班の発表は刺激になった	54 (77%)	13 (19%)	3 (4%)	0
数学の探究活動に取り組む気持ちが増した	44 (63%)	23 (33%)	3 (4%)	0
この企画に満足できた	48 (69%)	18 (26%)	4 (6%)	0

他に、グループでの思考や他グループとの交流によって様々な意見に触れられてよかったという声や、同様の企画を続けてほしいという声があり、次回も同様の方向性の企画を行いたい。

将来の改善点として、グループでの話し合いの時間が短いこと、中学生と高校生が同時に取り組める課題が少ない事、解説の時間が長くなってしまふことなどがあり、今後はタイムテーブルの調整や中学の部と高校の部を分けることを検討する。