

令和2年度
第2回洛北数学探究チャレンジ
実施報告

1. 概要
2. 問題と解説
3. 生徒の解答
4. 第1回との変更点とその影響
 - (ア) リモートによる影響
 - (イ) フィードバックの不足
5. 総括

1. 概要

以下の通り実施した。

ア 事業名 洛北数学探究チャレンジ

イ 実施年月日 令和2年12月19日

ウ 実施場所 京都府立洛北高等学校

エ 参加人数 42名 14チーム（1チーム2名から4名）

高等学校 20名7チーム

（本校4チーム、園部高校3チーム）

中学校 22名7チーム

（本校附属中6チーム、福知山高附属中1チーム）

オ 事業の概要 単純ではあるが拡張性の高い問題を与え、課題を設定させ、数理モデルを作成させる。数学の知識と深い理解、柔軟な発想を経て、探究という観点を通して課題解決し、優れた成果を導き出したチームを表彰するもの。

カ 当日の日程	模擬授業、出題	9:00～9:30
	グループディスカッション	9:30～10:30
	生徒発表・交流	10:40～11:30
	解説・表彰	11:30～12:00

キ 主催 洛北数学探究チャレンジ実行委員会
京都府立洛北高等学校・附属中学校

2. 問題と解説

以下の問題を出題した。

問： 与えられた模様を、講義で解説した対称性を用いて分類してください。
また、与えられたどの模様とも異なる対称性をもつ模様を考えてください。

小学6年生の算数では線対称と点対称について学習をする。また中学や高校の数学では図形やグラフの平行移動についても学習する。今回の出題では、平面全体に広がる模様について、その模様を保存するような移動について扱った。

以下の内容は複雑であるが、中学生に伝わるように表現を工夫して事前講義を行った。

\mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への距離を保つ写像（合同変換）は右の4種類に分類される。

逆に言えば、並進・鏡映・回転のいずれにも該当しない合同変換はすべり鏡映に分類される。すべり鏡映とは、鏡映に加え、鏡映軸の方向に並進を行う操作のことである。

ある合同変換で平面上の模様が変化しないとき、その模様は対称性をもつとすることができる。

具体的には集合 Λ を用いて平面上の模様 p を

$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Lambda$ で定義したとき、 $p = p \circ f$ となる合同変換 f が存在すれば p は f についての対称性をもつと定義する。

これを用いて、平面上の模様を分類することができる。

例えば、①の模様を保つような鏡映が存在するが、④を保つような鏡映軸は存在しない。したがって①と④は異なる対称性をもつ模様であると言える。

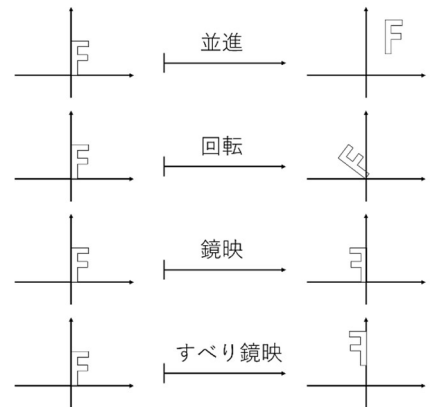


図1 4種類の合同変換

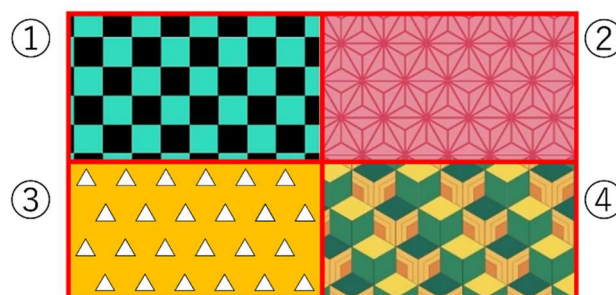


図2 4つの模様

	並進	回転	鏡映	すべり鏡映
① 	○	90° , 180°	○	○
② 	○	60° , 120° , 180°	○	○
③ 	○	120°	○	○
④ 	○	×	×	×

表1 4つの模様分類

表にまとめると、①, ②, ③, ④はいずれも異なる対称性をもつ。

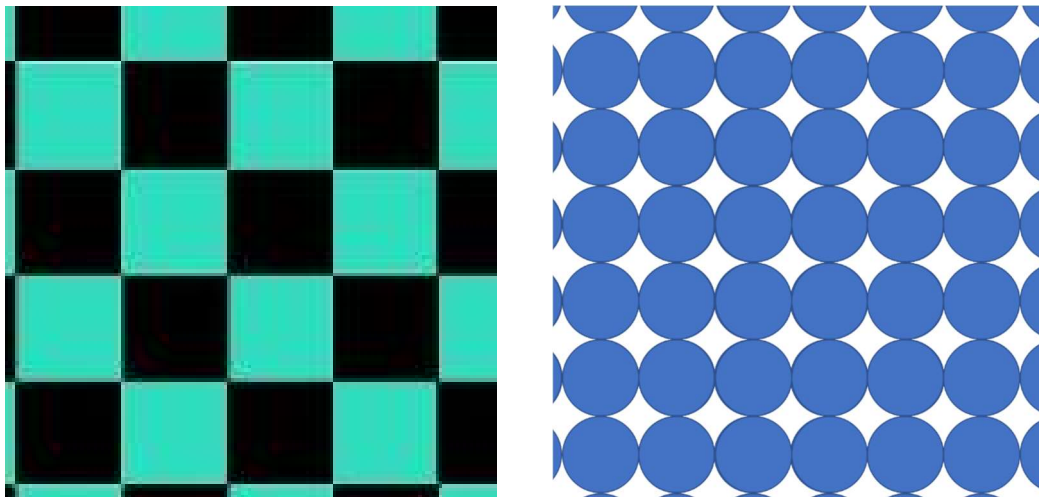


図3 対称性が等しい2つの模様

一方でこの2つの柄は、表1を用いて分類したときに差が現れない。

群論を用いて表現すると、左の模様を保存する \mathbb{R}^2 上の合同変換全体がなす群Gと右の模様を保存する合同変換全体がなす群Hが同型ということである。

\mathbb{R}^2 上の模様 p について、 p が2種類の（一次独立な）並進について保存されるとする。
 このとき p のもつ対称性の群を壁紙群（wallpaper group）と呼ぶ。

はじめの講義では生徒に伝えていないが、壁紙群は17種類あり、今回は異なる壁紙群をもつことを対称性が異なることの定義とした。



図4 壁紙群の分類

生徒は、以下の 22 種類の模様を対称性を用いて分類した（問題 1）。
 さらに、これらの模様のどの分類にも属さない壁紙群に対応する模様を考えた（問題 2）。

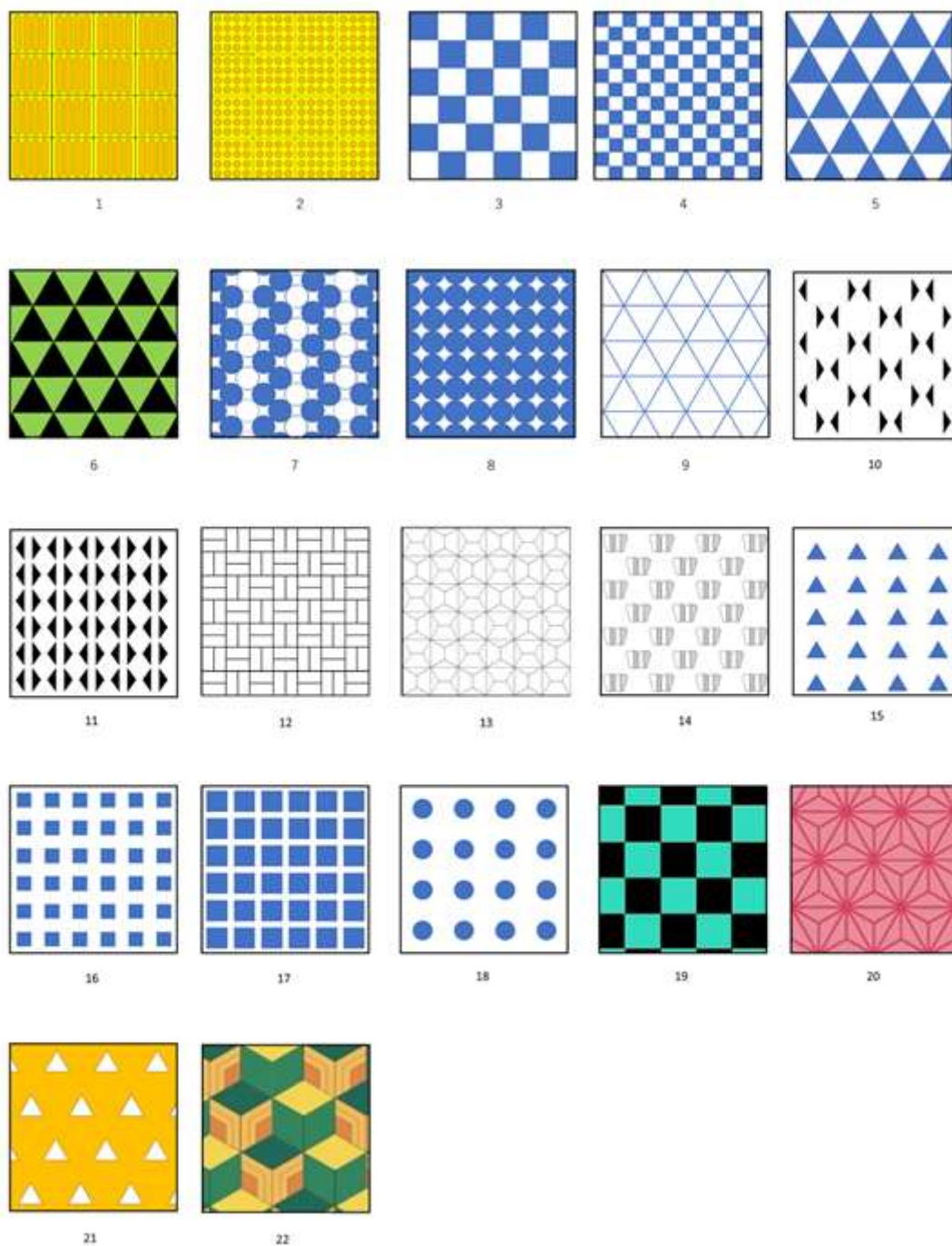


図 5 出題した模様

参加生徒に群論について講義することはしなかったが、表を用いて分類することは紹介した。ワークシートの配布も行い、生徒はこれを用いてスムーズに分類を行っていた。

洛北数学探究チャレンジ ワークシート

模様を分類する手がかり（この他にも分類の手段があるかも？）

- 回転はできるか？できるなら、何種類の回転ができるか？
- 鏡映はできるか？できるなら、何種類の対称軸があるか？
- すべり鏡映（ただし、鏡映を除く）ができるか？
できるなら、何種類のすべり鏡映軸があるか？

手がかりをメモしながら分類を進めよう！

番号	模様の特徴
1	回転 1 種類 (180°), 鏡映軸 2 種類, すべり鏡映軸なし
2	回転 2 種類 (180°, 90°), 鏡映軸 4 種類, すべり鏡映軸あり
3	回転 2 種類 (180°, 90°), 鏡映軸 4 種類, すべり鏡映軸あり
4	回転 2 種類 (180°, 90°), 鏡映軸 4 種類, すべり鏡映軸あり
5	回転 1 種類 (120°), 鏡映軸 3 種類, すべり鏡映軸あり

図 6 配布したワークシート（塗りつぶした部分は記入例）

模様 2 0 と 2 1 は対称性が異なる（すべり鏡映のみの軸があるかないか）が、これはグループワークの途中で解説をした。

3. 生徒の解答

ワークシートのかいもあって、概ね想定通りの分類をした班が多かった。
特に模様3, 4, 8, 19についてはすべての班が等しい対称性をもつと結論づけた。

またいずれの模様とも異なる対称性をもつ模様を考えた班も半数以上あった。
17種類の壁紙群のうち8種類を出題したが、すべての班の解答をあわせると13種類が出そろった。

4. 第1回との変更点とその影響

第2回となる今回は、新型コロナウイルスの影響で、第1回と異なり参加校を限定した。
本校および京都府の中高一貫校ネットワーク校（福知山、南陽、園部）のみの参加とし、
生徒は在籍校からのリモート参加とした。本校を含め3校から参加があった。
さらに第1回は9時から16時の開催だったところを、9時から12時の開催とした。

(ア) リモートによる影響

Zoomを用いることでリモートでも交流を行うことが出来たが、音声の切り替えや音量調整の手間、マイクの受け渡しなどでリモートならではの待ち時間が生じた。結果としてただでさえ短い交流時間がさらに短くなってしまった。

また画面のサイズが限られることなど様々なところで弊害が出た。

教員のスキル向上はもちろんのこと、画面に何を映すかあらかじめ細かい打ち合わせをするなど、使い方を工夫してスムーズな運営をすることが求められる。

(イ) フィードバックの不足

時間が短くなったことで、第1回のおきに行った採点と表彰を行うことができなかった。
その結果として、生徒は自分たちの解答が他の班と比べてどの程度正確だったのか知る機会がなかった。第1回から参加していた生徒は、この点についてかなりの不満をもったようである。

5. 総括

参加校を限定したことでチーム数が減ったものの、3校から中高生が参加し、事業として軌道に乗ることができた。

参加者に行ったアンケートでは、事業の内容に興味を持てたという声、また他の班の発表に刺激を受けたという声が多かった。

	非常によくあ てはまる	あてはまる	あてはまらな い	まったくあて はまらない
①内容がよく理解できた	29	13	0	0
②内容に興味を持てた	31	11	0	0
③主体性が高まった	31	11	0	0
④他の班の発表は刺激になった	35	7	0	0
⑤数学の探究活動に取り組む気持ちが増した	28	14	0	0
⑥この企画に満足できた	34	8	0	0

表2 アンケート集計結果

アンケートの自由記述では特にグループワークや他の班との交流がよかったという声が多く、今後もできるだけ時間を取って生徒間の交流を続けていくべきだと思われる。

課題点としてはやはりフィードバックがなかったことで、仮に後日の返却になったとしてもレポートを提出させ、1チームごとにコメントを返すべきだったと思われる。また今回は探究活動でありながら前半の問題には模範解答があったので、これも本来であれば模範解答のない自由な設問にすべきである。

他、中学生と高校生が同時に取り組める課題が少ないことや、中学生向けの解説をすると高校生にとっては既知の内容が多くなってしまうという問題点もあり、今後はタイムテーブルの調整や中学の部と高校の部を分けることを検討する。