

令和3年度
第3回洛北数学探究チャレンジ
実施報告

1. 概要
2. 問題と解説
3. 生徒のレポート
4. 第2回との変更点とその影響
5. 総括

洛北数学探究チャレンジ実行委員会

1. 概要

以下の通り実施した。

- ア 事業名 洛北数学探究チャレンジ
- イ 実施年月日 令和3年12月18日(土)
- ウ 実施場所 京都府立洛北高等学校
- エ 参加人数 36名 11チーム(1チーム2名から4名)
高等学校 22名7チーム
(本校5チーム、他校2チーム)
中学校 14名4チーム
(本校附属中4チーム)
- オ 事業の概要 単純ではあるが拡張性の高い問題を与え、課題を設定させ、数理モデルを作成させる。数学の知識と深い理解、柔軟な発想を経て、探究という観点を通して課題解決し、優れた成果を導き出したチームを表彰するもの。
- カ 当日の日程 模擬授業、出題 9:00~9:30
グループディスカッション・交流 9:30~11:30
解説・表彰 11:30~12:00
- キ 主催 洛北数学探究チャレンジ実行委員会
京都府立洛北高等学校・附属中学校

2. 問題と解説

以下の問題を出題した。

問： 6面サイコロの目を自由に変更して、強いサイコロを作りなさい。
ただし各面の数字は0以上の整数で、合計は21とする。

中学3年・高校数学Aで学習する確率を題材とした問題。

作成するサイコロの例として、目が「0, 2, 3, 5, 5, 6」であるサイコロA, 「0, 0, 2, 5, 7, 7」であるサイコロBなどがあげられる。

作成可能なサイコロは331種類であり、元の配置（「1, 2, 3, 4, 5, 6」）は禁止とした。

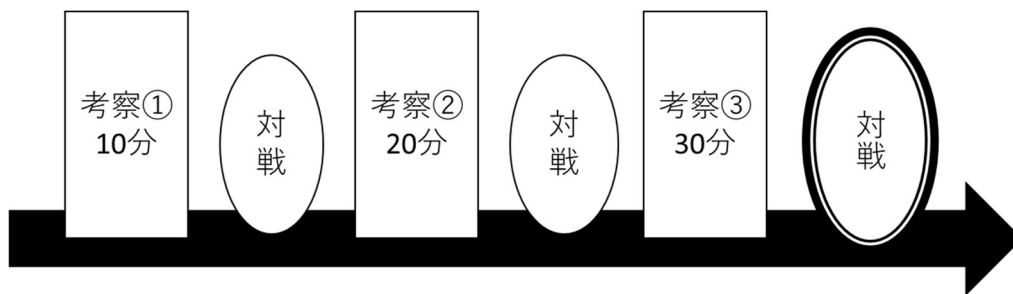
2つのサイコロを同時に投げ、出目の大きいほうを勝ちとする勝負を行う。これを3回行い、2回以上勝ったほうの「勝ち」となる。

2つのサイコロのどちらが「強い」かは、単純な計算によって比較できる。右図のような表を作ると、サイコロAが勝つ確率は $\frac{15}{36}$, Bは $\frac{16}{36}$ であり、Bのほうが強い。

		サイコロB					
		0	0	2	5	7	7
サイ コ ロ A	0	-	-	B	B	B	B
	2	A	A	-	B	B	B
	3	A	A	A	B	B	B
	5	A	A	A	-	B	B
	5	A	A	A	-	B	B
	6	A	A	A	A	B	B

自分以外の全チームと対戦する機会を3回設け、対戦を1回するごとに、他チームのサイコロの配分をメモして次回に生かすことができるスケジュールとした。

3回目の対戦でより多くのチームに勝利したサイコロの優勝とする。



3度の対戦のあと、生徒へはおおむね以下のような解説を行った。

解説

- ① 作成可能な 331 種類のサイコロのうち、すべてのサイコロに対して強いものは存在しない。したがって『できるだけ多くのサイコロに有利をとれるサイコロ』を作成することになる。
- ② 例えば「0, 2, 3, 5, 5, 6」は 331 種類中 276 個、「1, 2, 3, 5, 5, 5」は 275 個に有利をとれるため、強いと考えられる。これらのサイコロを第一世代と呼ぶことにする。
- ③ ところが、全員が上記のサイコロを使い始めると、「0, 0, 2, 6, 6, 7」「0, 0, 3, 6, 6, 6」など『331 種類全体では有利をとれる相手が少ないが、第一世代に対しては有利』であるサイコロを使う価値が生じる。これらのサイコロを第二世代と呼ぶ。
- ④ 同様のことが連続して起こり、第三世代、第四世代、…が現れる。サイコロは有限個しかないので、いずれ第一世代に戻る。
- ⑤ また、第一世代のサイコロが多く存在するとき、次の対戦では第二世代が多く出回ると考えられるから、裏をかいて第三世代を使うこともよい戦略である。多くのチームがこれを考えることで、使用頻度の割合が収束していくと考えられる。

この⑤はナッシュ均衡と呼ばれるもので、最終的にはゲーム理論の解説を行った。

例えるなら「じゃんけんグリコ」において

- ① 全員がグー・チョキ・パーを均等な確率で出すならチョキを出すのが最も有利
- ② 全員が①のように考えてチョキを出すようになったら、グーを出すのが最も有利
- ③ 全員が②のように考えるなら…

という考えでループが起こり、最終的にグー・チョキ・パーを 2 : 2 : 1 で出す戦略に落ち着く。

ただし今回のチャレンジでは混合戦略を持ち込むことができないため、ナッシュ均衡が存在するとは限らない。

3. 生徒の解答

生徒は、おおむねこちらの期待通りの考察を行った。つまり

- ① 前回の対戦で出たサイコロに有利をとれるサイコロを探す。
- ② ①の考え方で作られたサイコロに、さらに有利をとれるサイコロを探す。

という動きを大半のグループが行ってくれた。

特定のサイコロに対して有利をとれるサイコロを探すのはコツが必要で、中学生・高校生ともに探せるグループと探せないグループが存在した。

優勝したグループは上記②の考えのほか、有利をとれるサイコロに対して確実に勝てるような工夫も行っていった。

4. 第2回との変更点とその影響

新型コロナウイルスの影響で第2回と同様に参加校を限定する予定であったが、感染状況の改善によって府下の中・高すべての生徒に参加を呼び掛けた。

時間は第2回と同じく9時から12時の開催とした。

ただし、募集期間の途中から募集範囲を広げたために参加数は伸び悩んだ。

第2回では自分たちの解答が他の班と比べて良かったのか悪かったのか知る機会がなく、課題としてフィードバックの不足があった。

今回のテーマは結果がすぐに出ること、どのようなチームが優れていたかわかりやすいことなど、フィードバックという点で優れていた。

5. 総括

チーム数が減ったものの、3校から中高生が参加し、また対面での実施を復活させることができた。

参加者に行ったアンケートでは、楽しかった・事業の内容に興味を持てたという声が多かったほか、実証の機会が複数回あったのがよかったという声もあった。

	非常によくあてはまる	あてはまる	あてはまらない	まったくあてはまらない
①内容がよく理解できた	22	12	1	0
②内容に興味を持てた	35	0	0	0
③主体性が高まった	27	8	0	0
④他の班の発表は刺激になった	30	5	0	0
⑤数学の探究活動に取り組む気持ちが増した	32	3	0	0
⑥この企画に満足できた	35	0	0	0

表 アンケート集計結果

アンケートの自由記述ではグループワークや他の班との交流がよかったという声のほか、友人と協力してできたことが楽しかったという声が多い。今後もこのような機会を増やしたい。