GALOIS

京都府立桃山高等学校
数学教科通信　ガロア
令和２年５月１１日
第６号

19世紀フランス7月革命のさなか、数学史上の輝かしい業績を残しながら、その純粋な生き方のゆえに世間にその才能を認められることなくわずか20歳の若さで決闘に倒れた天才数学者エヴァリスト・ガロア（Évariste Galois）の名をもらいこの通信が生まれました。

登場人物
　M 先生
　　某 M 高校の数学教師。数学をこよなく愛している。現在は緊急事態宣言のため在宅勤務中。
　N さん
　　M 先生を師匠と仰ぐ M 高校の数学大好き生徒。現在は緊急事態宣言による休校のため自宅学習中。

接触8割減のなぜ？

Nさん「先生こんにちは。お久しぶりです。画面に映ってますか？」
M先生「ほんと久しぶりです。映ってますよ。」
N「オンラインビデオ通話で質問できるとは夢にも思っていませんでした！」
M「そうですね。コロナウイルスはいろいろな形で私たちの生活を一変させてますね…。」
N「最近はＴＶを観てもコロナ関連の内容ばかりですが、ひとつ気づいたことがあります。」
M「何ですか？」
N「今更ながらですが・・・日ごと変わる感染者数のグラフとか、陽性率とか、いろいろな判断を下すときに用いられているであろう各種の分析って全部数学なんですよね。」
M「その通りです。」
N「例えば、濃厚接触を 80 %減らせればコロナウイルス感染を早期に収束させることができるという話で、何で 80 %なのかを私なりに考えてみました。」
M「ほー、是非聞かせてください！」
N「はい、いま 100 人のコロナ感染者がいたとします。そして、20 %の人が他人に感染させるが、80 %は感染させないという仮定をします。この仮定は統計的に事実のようです。さらに、毎日、1 人の感染者が 10 人の人と濃厚接触すると仮定します。すると、100 人のコロナ感染者のうち 20 人だけが、濃厚接触した 10 人に感染させます。そうすると、
　　200 人（＝ 20 × 10 人）
が新たに感染する計算になります。
　ここで、濃厚接触を 50 %減らすと、10 人が 5 人になるので、新たな感染者は
　　100 人（＝ 20　× 5 人）
になります。100 人の感染者はその後は治っていくので、
　「100 人治っても、100 人新たに感染」
ということになります。
　つまり、50 %接触減では、感染者数は不変であることが分かります。」
M「そうですね。50 %接触減では感染者の数を減らすことは出来ませんね。では、接触を 80 %減らしたとしたら？」
N「はい、100 人の感染者のうち 20 人だけが、感染者一人につき 2 人（10 人から 80 %減なので）に感染させます。そうすると、
　　40 人（＝ 20 × 2 人）
が新たな感染者となります。
今度は、
　「100 人治って、40 人新たに感染」
となるので、感染者数は 60 %減になります。つまり、濃厚接触を 80 %減らせれば、感染者数は 60 %減になるわけです。
　いま感染者が 1 万人いたとします。1 日につき、60 %減となると、7 日後には、

$$10000 \times 0.4^7 \fallingdotseq 10000 \times 0.0016 = 16$$

さらに 10 日後には

$$10000 \times 0.4^{10} \fallingdotseq 10000 \times 0.0001 = 1$$

つまり、人との接触 8 割減を 10 日間我慢すれば 1 万人の感染者は 1 人まで減ると見込まれるわけです。」
M「そうですね。では、接触が 60 %減なら？」
N「感染者数は 1 日につき 2 割減と計算できて同じ 1 人まで減らすのに約 40 日かかってしまいます。」
M「よくできました。もちろん、以上の計算はとても簡単なモデルを仮定してますし、実際の式計算はもっと多くの要素が絡み、従ってもっと複雑な計算式になるのでしょう。でも事象を大きく捉えるという点で、Ｎさんの式で十分に把握できますね。」
N「休業要請している経済活動を再開させるための根拠となる指標を示すツールも数学なんですね。最近自宅で新聞を読むようになって、現代社会における数学の重要性がわかった気がします。これから勉強していく意味も考えさせられました。」
M「ちゃんと『創造的休暇』を過ごしてくれているようで安心しました。(^o^)」

ABC予想が定理になった！

N「もちろんです！そこで、本日の本題に入っていいですか？先日から新聞や多くのメディアで『ABC 予想』が取り上げられてました。世間を賑わせているのでたいへん気になり、それなりに調べたのですが、理解ができません・・・(>_<)」
M「なるほど。」
N「その『ABC 予想』とは何なのか、わかりやく教えていただきたいのです。いつもながら (^_^;)…。」
M「仕方がないですね。まず『ABC 予想』ですが、1985 年に提起された数論の予想です。予想とは、たぶんこうなるはずだ！という段階で、証明された状態ではないものです。その予想が正しいことを証明する論文が 2012 年、京都大学数理解析研究所教授である望月新一先生によって公開されました。」
N「えっ？そんな前なのですか？？」
M「そうですね。この論文は『証明した』と主張してますが、果たしてその主張が正しいのか？という検証を経なければ認められないのです。」
N「証明が正しいことを証明するんですね！？」
M「しかし、証明が難しすぎて正しいということを示すのに 7 年もの歳月を要しました。」
N「そのことが先日来、報道されていたということですか。はぁ・・・」
M「この業績は、数学界のノーベル賞にあたる『フィールズ賞』級の快挙とされてます。」
N「実際、どんな主張なのか、なぜ世界がそれを賞賛するのか教えてください。」
M「そうですね。では・・・
２つの数とその和を考えます。たとえば、
　　$1 + 8 = 9$
において最後の数９とこの３つの数 1, 8, 9 の積を比べると当然掛けた方が大きいです。」
N「$9 < 1 \times 8 \times 9$ は当たり前です。」
M「でもここで、それぞれの数を素因数分解します。
　　$8 = 2 \times 2 \times 2$,　　$9 = 3 \times 3$
です。で、さっきは、
　　$1 \times 8 \times 9 = (1) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3)$
という数を考えましたが、ABC 予想では、このだぶった 2 とか 3 を取り除いた数を考えます。つまり、
　　$(1) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3)$
ではなく
　　$(1) \times (2) \times (3)$
すると、その数はぐぐっと小さくなって
　　$1 \times 2 \times 3 = 6$
これは最後の数 9 より小さいですよね！」
N「　$9 < 1 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3)$
当たり前だったのが、
　　$9 > (1) \times (2) \times (3)$
となり、大きさが左右入れ替わる！」
M「つまり、３つの数を素因数分解してダブった数を省いてしまって、掛けた数を考えるとそれはぐっと小さくなり、最後の数より小さくなることがあるのです。」 (→次ページへ)

N「う～ん、でも・・・

$$2+9=11$$

の場合では

$$11<(1\times 2)\times(3\times 3)\times(11)$$

ここで、ダブりを省くと

$$11<(2)\times(3)\times(11)$$

だから大小は変わりません。」

M「実は、都合良く小さくできる a, b, c の組み合わせはほとんどないそうですが、

$$9>(1)\times(2)\times(3)$$

においても右辺の $(1)\times(2)\times(3)$ を二乗すると、この組み合わせでも最後の数９より大きくなります。

$$9<\{(1)\times(2)\times(3)\}^2=36$$

ABC 予想はこれがどんな時も成り立つというものです。a, b, c が互いに素という条件がつきますが、

$$a+b=c$$

のとき、

$$c<\{\mathrm{rad}(abc)\}^2$$

が成り立つというのです。この rad(abc) というのは先ほどの素因数のダブりを省いてから掛け合わせた数です。それを二乗しています。つまり、素因数のダブりを省いて積を小さくしたとしても二乗してしまえば、c より小さくすることはできないというわけです。実際証明されたのはその一歩手前で、

　任意の $\varepsilon>0$ に対して、$(1+\varepsilon)$ 乗してしまえば入れ替わるものは高々有限個しかない

という、さらに深く立ち入った内容ですが、ここまでに止めておきましょう。」

N「しかし、素人にはこれのどこが嬉しいかがさっぱりわかりません。」

M「実はこのことで、あの解くのに 360 年かかったフェルマーの最終定理も当たり前のように解けてしまいます。」

N「えっ！フェルマーの最終定理って

　$n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots$ のとき、

$$X^n+Y^n=Z^n$$

　を満たす整数 X, Y, Z は存在しない

ですよね？」

M「はい、$n=2$ のときは三平方の定理の式ですし、整数 X, Y, Z の組は無数に存在しますが、$n\geqq 3$ になった途端にそれを満たす整数 X, Y, Z の組は存在しないのです。このことを証明するには、背理法を用います。

その X, Y, Z に対し

$$a=X^n,\quad b=Y^n,\quad c=Z^n$$

と考えると

$$\begin{aligned} c=Z^n &<\{\mathrm{rad}(X^n Y^n Z^n)\}^2\\ &=\{\mathrm{rad}(XYZ)\}^2\\ &\leqq (XYZ)^2\\ &<(Z\times Z\times Z)^2\\ &=Z^6 \end{aligned}$$

　ゆえに　$Z^n<Z^6$

となります。つまり、こういう X, Y, Z があるなら、n は 3, 4, 5 のどれかになります。一方、n = 3, 4, 5 の時は個別に整数 X, Y, Z の組が存在しないことは証明されています。よって、どんな n でも成り立ちません。」

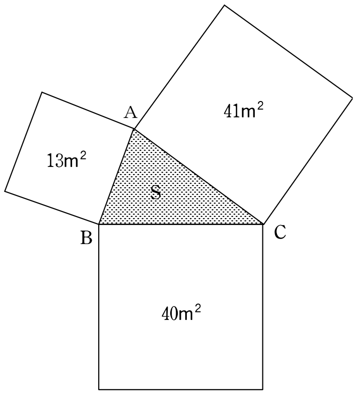
N「『ABC 予想』すご～い！」

前回のチャレンジ問題

【問題】

△ABC と その各辺を一辺とする正方形があります。３つの正方形の面積が図の通りのとき、△ABCの面積Sを求めてください。

条件：中学生でも分かるエレガントな解法でお願いします。



今回、レポートを寄こしてくれたのは

　ひげだんしゃくさん、Shoushi さん

の２人でした。

以下は Shoushi さんの解答です。

13, 40, 41 はそれぞれ２つの平方数の和で表される.

$13=2^2+3^2\quad 40=2^2+6^2\quad 41=4^2+5^2$

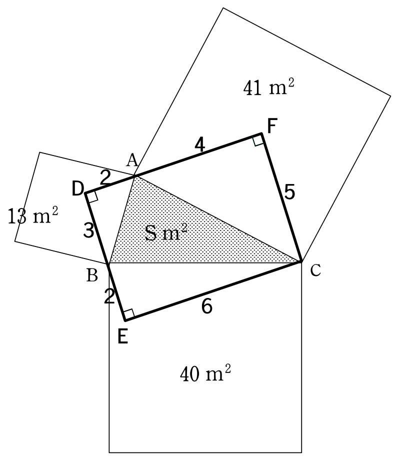
つまり△ABCの辺ABは直角を挟む2辺が 2 と 3 である直角三角形の斜辺にあたる.

同様に

　辺BCは直角を挟む2辺が 2 と 6

　辺CAは直角を挟む2辺が 4 と 5

である直角三角形の斜辺となる.



従って，図のように各辺に直角三角形を配置し，直角となる点をそれぞれ，D，E，F とすると四角形DECFは長方形となる.

よって，

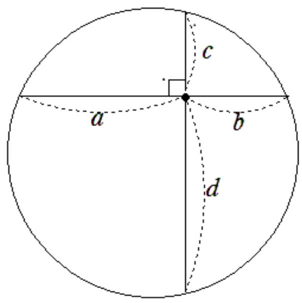
$$\begin{aligned} S&=(\text{四角形DECF})-\triangle ADB-\triangle BEC-\triangle CFA\\ &=5\cdot 6-\frac{2\cdot 3}{2}-\frac{2\cdot 6}{2}-\frac{4\cdot 5}{2}\\ &=30-3-6-10\\ &=11 \end{aligned}$$

ゆえに　　$S=11$（m^2）

今月のチャレンジ問題

M「前回のチャレンジ問題では、多くの皆さんから解答をいただきました。ありがとうございました。ただ、正式なレポートでなかったので、すべての皆さんを紹介できず申し訳ありません。

　さて、今回の問題ですが、前回は平方数が登場しましたので、同じ平方数つながりで、以下の問題を出題します。

> 半径１である円において，弦２本が垂直に交わっています。図のように $a,\ b,\ c,\ d$ を定めるとき
>
> $$a^2+b^2+c^2+d^2$$
>
> の値を求めてください。
>
> 
>

N「２本の弦が垂直に交わっていれば、その交点の位置によらずにその値は一定になる、ということですね。だったら答はすぐにわかりました！」

M「はい、特別な場合を考えればその値はすぐにわかりますね。問題は２本の弦の交わる点の位置に無関係にその値が一定であることを証明することです。では、チャレンジしてみてください。

　解けた人は、Ａ４用紙１枚にまとめて進路指導部前の提出箱に入れてください。」

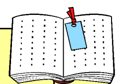
N「休校が明けるまでは入れられませ～ん。」

M「〆切りは休校が明けることを願って

　　６月５日（金）１７：００

といたしましょう。」

N「必ずペンネームを書いてね。(^_^;)」



読書のススメ

「数学する身体」（森田真生著：新潮文庫）
数学はもっと人間のためにあることはできないのか。最先端の数学に、身体の、心の居場所はあるのか……。身体能力を拡張するものとして出発し、記号と計算の発達とともに抽象化の極北へ向かってきたその歴史を清新な目で見直す筆者は、アラン・チューリングと岡潔という二人の巨人へと辿り着く。数学の営みの新たな風景を切りひらく俊英、その煌めくような思考の軌跡。小林秀雄賞受賞作。

～お知らせ～

延期が繰り返されている『数学検定』ですが、８月中の実施に向けて準備中です。

詳細は６月にお知らせします。