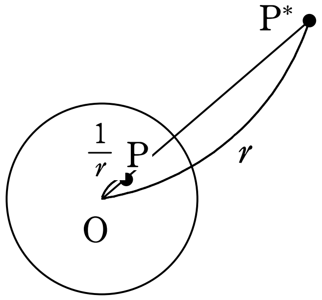
京都マス･フェス2025　2ndステージ　京都数学オリンピック道場
使用問題

1

平面上に原点Ｏがある。この平面上の図形に対し，（単位円Ｏに関する）反転と呼ばれる変換がある。この変換は，図形上の各点Ｐを

- ＰとＯが一致するとき，消去する（無限遠点と呼ばれる，平面上にない新たな点に移すととらえることもできる）
- ＰとＯが一致しないとき，以下のような点 P^* に移す

　点 P^* はＯを始点とする半直線OP上にあって，$OP \cdot OP^* = 1$ を満たす。



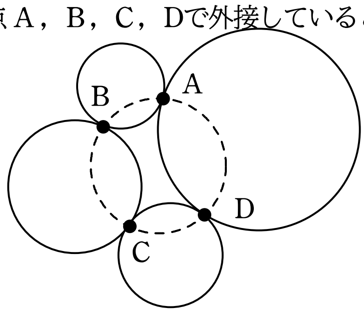
円を反転したとき，以下が成り立つことが知られている。

（ｉ）円が点Ｏを通るとき，反転によって，反転前の円のＯにおける接戦と平行な直線が得られる。

（ii）円が点Ｏを通らないとき，反転によって，再び円が得られる。

反転を用いて以下の問いに答えよ。

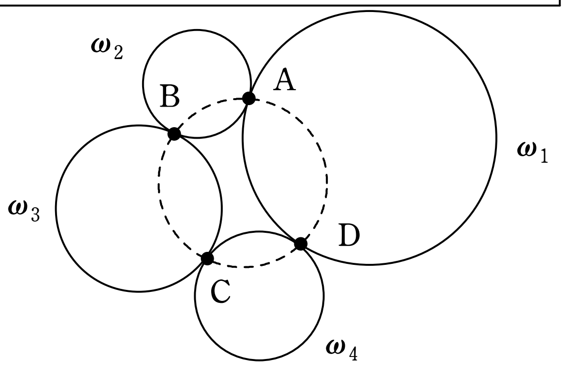
（問）図のように４円が点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄで外接しているとき，点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄは同一円周上にあることを示せ。



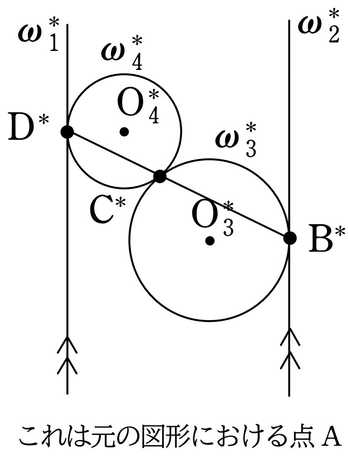
　点Aを原点Oとみなし反転することを考える。

図のように４つの円をそれぞれ ω_1，ω_2，ω_3，ω_4 とおく。このとき、円 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4 を反転して得られる図形を ω_1^*，ω_2^*，ω_3^*，ω_4^* とし，

点B，C，Dを変換して得られる点を B^*，C^*，D^* とする。性質（ｉ）から ω_1^*，ω_2^* はいずれも点Ａにおける円 ω_1 の接線と平行な直線である。反転では相異なる二点は相異なる二点に変換されるので、ω_1^*，ω_2^* は重ならず平行である。



性質（ii）より ω_3^*，ω_4^* は円である。ω_2^* と ω_3^*，ω_3^* と ω_4^*，ω_4^* と ω_1^* はそれぞれ点 B^*，C^*，D^* のみを共有するので，各点で接しており，図のようになる。



　円 ω_3^*，ω_4^* の中心をそれぞれ O_3^*，O_4^* とする。

$\triangle B^*O_3^*C^*$ と $\triangle C^*O_4^*D^*$ が相似であることを示そう。$\omega_1^* \perp O_4^*D^*$ と $\omega_2^* \perp O_3^*B^*$ と $\omega_1^* /\!/ \omega_2^*$ とから $O_3^*B^* /\!/ O_4^*D^*$ が分かる。よって，O_4^*，C^*，O_3^* が同一直線上にあることに注意すれば，$\angle B^*O_3^*C^* = \angle C^*O_4^*D^*$ である。

$\triangle B^*O_3^*C^*$ と $\triangle C^*O_4^*D^*$ も二等辺三角形なので相似であることが示された。

上で示した相似と $O_3^*B^* /\!/ O_4^*D^*$ によって B^*，C^*，D^* が同一直線上にあると分かる。これは元の図形における点Ａ，Ｂ，Ｃを通る円 α は反転によって B^*，C^* のみならず D^* も通る直線に移るということである。よって点Ｄは円 α 上にある。

2

任意の四角形 ABCD の各辺を一辺とする正方形を四角形 ABCD と外接するように書く。
AB を一辺とする正方形の重心を P，BC を一辺とする正方形の重心を Q，CD を一辺とする正方形の重心を R，DA を一辺とする正方形の重心を S とするとき，PR と QS は長さが等しく、直交することを示せ。
（Van Aubel の定理）

(解法 1：初等幾何による証明)

まず以下の補題を示す。

【補題 (Finsler－Hadwiger theorem)】
ある頂点 A を共有する 2 つの正方形 ABCD と AB′C′D′ について， ABCD と AB′C′D′ のそれぞれの重心 E, F と BB′，DD′ のそれぞれの中点 G，H の 4 点を頂点とする四角形 EHFG は正方形になる。

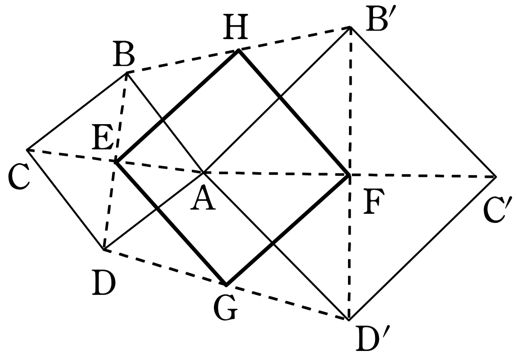
[証明]

△BB′D，△D′B′D について中点連結定理より

$EH = GF = \frac{1}{2}DB'$，$EH /\!/ GF /\!/ DB'$

同様にして △DBD′，△B′BD′ について中点連結定理より

$EG = HF = \frac{1}{2}BD'$，$EG /\!/ HF /\!/ BD'$



ここで，△AB′D≡△ABD′ であり， △AB′D は △ABD′ を点 A を中心に 90° 回転させた図形になるので

$DB' = BD'$， $DB' \perp BD'$

以上のことから四角形 EHFG は 正方形となり、補題が示された。

補題を用いて証明する。

[Van Aubel の定理の証明]

BD の中点を M とする。

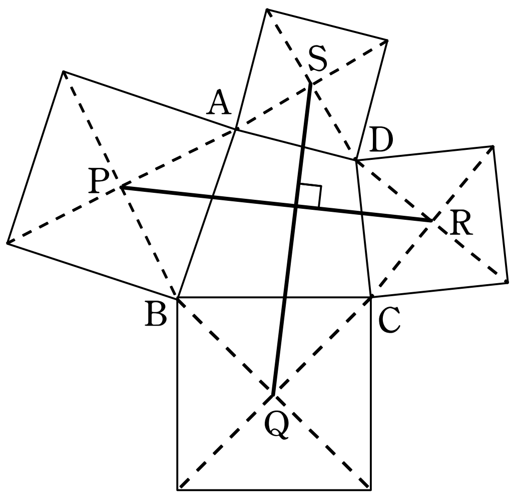
AB と AD をそれぞれ一辺とする正方形は 点 A を共有するので,

【補題】から △MPS は直角二等辺三角形であり,

$MP = MS$, $MP \perp MS$

同様に BC と CD をそれぞれ一辺とする正方形を考えると,

$MQ = MR$，$MQ \perp MR$

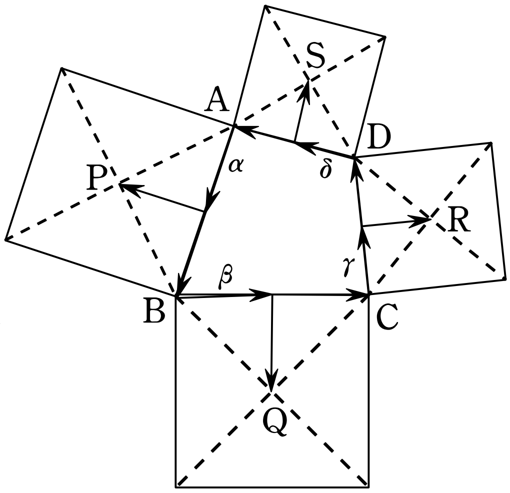


よって　△MPR≡△MQS であり,

△MPR は △MQS を点 M を中心に 90° 回転させた図形になるので $PR = SQ$，$PR \perp SQ$ がわかる。

（解法２：複素数平面による証明）

Aを原点とする複素数平面を考える。
ABに対応する複素数を 2α,
BCに対応する複素数を 2β,
CDに対応する複素数を 2γ,
DAに対応する複素数を 2δ とする。



AB，BC，CD，DAとP，Q，R，SからAB，BC，CD，DAに下ろした垂線との交点をそれぞれP′，Q′，R′，S′とすると，
PP′に対応する複素数は $-i\alpha$
QQ′に対応する複素数は $-i\beta$
RR′に対応する複素数は $-i\gamma$
SS′に対応する複素数は $-i\delta$ と表すことができる。

よって　PRに対応する複素数 z_1 は $z_1=i\alpha+\alpha+2\beta+\gamma-i\gamma=(\alpha+2\beta+\gamma)+i(\alpha-\gamma)$
QSに対応する複素数 z_2 は $z_2=i\beta+\beta+2\gamma+\delta-i\delta=(\beta+2\gamma+\delta)+i(\beta-\delta)$　であり，

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ を用いて計算すると

$$z_2=(\beta+2\gamma+\delta)+i(\beta-\delta)=(-\alpha+\gamma)+i(\alpha+2\beta+\gamma)=i\{(\alpha+2\beta+\gamma)+i(\alpha-\gamma)\}=iz_1$$

となることから　QSはPRを90°回転させた図形となり題意を満たす。

※90°の回転を紙面鉛直方向の単位ベクトルとの外積と捉えればベクトルでも同様に証明が可能。

京都マス･フェス2025　2ndステージ　京都数学オリンピック道場 使用問題

$\boxed{3}$ 4 種のマーク ♠, ♣, ♡, ♢ と 1 ∼ 13 の数字がそれぞれ一つずつ書かれた 52 種類のカードが 1 枚ずつある．以下の条件を満たすカードの集合を**階段**と呼ぶ．

- 3 枚以上からなる．
- 同一マークのカードからなる．
- 書かれている数字が連続している．

例えば $\{♠3, ♠4, ♠5, ♠6\}$ は階段である．一方 $\{♣1, ♣2\}$, $\{♡4, ♡5, ♢6\}$, $\{♠12, ♠13, ♠1\}$ は階段でない．

(1) 今ある 52 枚のカードのみを用いて同時に作ることのできる階段は最大でいくつか．
(2) 階段は全部で何種類あるか．

次に今ある 52 枚のカードを用いて，以下のルールに従って階段を順番に「山札」から「場」に出す．

(i) 初めは 52 枚のカードすべてが山札にあり，場には 1 枚もない．
(ii) 最初に場に出す階段は何でもよい．
(iii) 2 回目以降に場に出せるのは, 以下を満たす階段 K である．
- 直前に出た階段と K は同じ枚数である．
- 直前に出た階段の最大の数字より, K の最大の数字の方が大きい．

(iv) 一度場に出したカードは戻さない．

例えば $\{♠3, ♠4, ♠5, ♠6\}$ が直前に出ていたとき, $\{♡5, ♡6, ♡7, ♡8\}$ は出せる．しかし $\{♡6, ♡7, ♡8\}$ や $\{♡3, ♡4, ♡5, ♡6\}$ は出せない．また $\{♠5, ♠6, ♠7, ♠8\}$ は ♠5 と ♠6 が既に場に出ており山札にないため出せない．

(3) 最大で何枚のカードを場に出せるか．またそのとき各階段は何枚のカードからなるか．
(4) 3 枚のカードからなる階段のみを場に出していく際の出し方が N 通りあるとする．ただし 1 枚も出さないことも 1 通りと数える．このとき N を $4!$ で割った余りを求めよ．
(5) N や関連する他の場合の数について分かることを好きに議論せよ．

(オリジナル問題)

解答例　(1) 各マークについて，同時に作れる階段の最大数は 4 である．なぜなら 5 組作るには $3 \times 5 = 15$ 枚のカードが必要だからである．よって $4 \times 4 = \mathbf{16}$ **個**.

(2) 各マークについて，連続する数字の開始と終了を指定すると，${}_{13}\mathrm{C}_2 = 78$ 通りある．このうち 2 枚だけからなる場合を除外するので，$78 - 12 = 66$ 通りである．これが 4 つのマークについてあるから，$66 \times 4 = \mathbf{264}$ **種類**である．

(3) ルールに従うと,「1」が書かれたカードは最大で 1 枚,「2」が書かれたカードは最大で 2 枚,「3」が書かれたカードは最大で 3 枚しか場に出すことができない．同様に「13」,「12」,「11」もそ

れぞれ 1，2，3 枚までしか出せない．そのため $52-12=40$ 枚よりも多くのカードを出すことは不可能である．以下では何枚のカードからなる階段を出せば 40 枚のカードを出すことができるかを求める．

場に出された階段が 3 枚のカードからなるとき．「4」が 3 枚以下しか出せないため不可能．

場に出された階段が 4，5 枚のカードからなるとき．可能．

場に出された階段が 6 枚のカードからなるとき．「2」を出さなかった 2 つのマークそれぞれについて，「3」以上の計 11 枚のカードからは 1 つしか階段を作れない．よって少なくとも $(13-6)\times 2=14$ 枚のカードが場に出せないため，40 枚を出すことは不可能．

場に出された階段が 7，8，9 枚のカードからなるとき．各マーク 1 組しか階段を作れない．よって最大でも $9\times 4=36$ 枚しか場に出せない．

場に出された階段が 10 枚のカードからなるとき．可能．

場に出された階段が 11，12，13 枚のカードからなるとき．「3」を出さなかったマークは階段が作れない．よって 13 枚以上出せないカードがあるので不可能．

以上より，最大で **40 枚**を場に出すことができ，そのとき各階段をなすカードの枚数は **4 枚か 5 枚か 10 枚**.

(4) 考え方：

> 対称性をふんだんに用いる．例えば $\spadesuit$，$\clubsuit$，$\heartsuit$，$\diamondsuit$ の 4 種類のマークすべてが場に出されるような場合の数は，マークの入れ替えを考えると $4!$ の倍数通りあるため，考えなくてよい．つまり場に出されるカードのマークが 3 種類以下の場合の数を $4!$ で割った余りが，N を $4!$ で割った余りに一致する．

解答：a_4，a_3，a_2，a_1，a_0 をそれぞれ,

(i) 場に 4 種類すべてのマークが出され，その登場順が $\spadesuit\to\clubsuit\to\heartsuit\to\diamondsuit$ である場合の数,
(ii) 場に 3 種類のマーク $\spadesuit$，$\clubsuit$，$\heartsuit$ が出され，その登場順が $\spadesuit\to\clubsuit\to\heartsuit$ である場合の数,
(iii) 場に 2 種類のマーク $\spadesuit$，$\clubsuit$ が出され，その登場順が $\spadesuit\to\clubsuit$ である場合の数,
(iv) 場に $\spadesuit$ のカードだけが出される場合の数,
(v) 場にカードが出されない場合の数 $(=1)$

とする．例えば場に出された階段が $\{\spadesuit 3,\spadesuit 4,\spadesuit 5\}$, $\{\spadesuit 7,\spadesuit 8,\spadesuit 9\}$, $\{\clubsuit 8,\clubsuit 9,\clubsuit 10\}$ の 3 つのときは (iii) に分類される．このときマークの入れ替えを考えると $N=4!a_4+4!a_3+4\cdot 3a_2+4a_1+a_0$ である．よって a_4，a_3 は求める必要がないし，a_2 は偶奇のみ求めたらよい．

a_1 を求める．場に出る各階段を ◯，場に出ないカードを $|$ の記号で捉えると，階段が 4, 3, 2, 1 個出る場合の数はそれぞれ

- $|$ を 1 つ, ◯ を 4 つ並べる場合の数
- $|$ を 4 つ, ◯ を 3 つ並べる場合の数
- $|$ を 7 つ, ◯ を 2 つ並べる場合の数

- $|$ を 10 個, $\bigcirc$ を 1 つ並べる場合の数

に対応する．よって $a_1 = {}_5\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_3 + {}_9\mathrm{C}_2 + {}_{11}\mathrm{C}_1 = 87$ である．

a_2 の偶奇を求める．そのために $a_2 + a_1 + a_0$ の偶奇を求める．つまり $(\boxed{\text{iii}})$ または $(\boxed{\text{iv}})$ または $(\boxed{\text{v}})$ の場合を考える．偶奇だけ求めたらよいので，対称性を用いて偶数通りある状況を除外していく．$n = 1, 2, \ldots, 11$ に対し，$\spadesuit S_n$ で階段 $\{\spadesuit n, \spadesuit(n+1), \spadesuit(n+2)\}$ を，$\clubsuit S_n$ で階段 $\{\clubsuit n, \clubsuit(n+1), \clubsuit(n+2)\}$ を表すことにする．階段 $\spadesuit S_1$, $\spadesuit S_2$, $\spadesuit S_3$, $\clubsuit S_1$, $\clubsuit S_2$, $\clubsuit S_3$ が出されるか否かによって状況を分類すると，以下が成り立つ．

(a) $\spadesuit S_1$, $\clubsuit S_2$ のみが出される場合の数
$=$ $\spadesuit S_2$ のみが出される場合の数
(b) $\spadesuit S_1$, $\clubsuit S_3$ のみが出される場合の数
$=$ $\spadesuit S_3$ のみが出される場合の数
(c) $\spadesuit S_1$ のみが出され, 更に S_4 以降に最初に $\spadesuit$ の階段が出される場合の数
$= \spadesuit S_1$ のみが出され, 更に S_4 以降に最初に $\clubsuit$ の階段が出される場合の数

よってこれらの場合の数は合計すると偶数となるため，これら以外の状況のみを考えたらよい．$\spadesuit S_1$, $\spadesuit S_2$, $\spadesuit S_3$, $\clubsuit S_1$, $\clubsuit S_2$, $\clubsuit S_3$ のうち最大で 2 つしか出せないことに注意すると，具体的には考えるべき場合は以下の 3 つである．

(I) $\spadesuit S_1$ のみが出され, その後には階段が 1 つも出されない場合
(II) $\spadesuit S_2$, $\clubsuit S_3$ のみが出される場合
(III) $\spadesuit S_1$, $\spadesuit S_2$, $\spadesuit S_3$, $\clubsuit S_1$, $\clubsuit S_2$, $\clubsuit S_3$ のいずれも出されない場合

更にもう 1 つの対称性を導入する．「S_n を出す」とは，「$\spadesuit S_n$ または $\clubsuit S_n$ を出す」こととする．$S_{b_1}, S_{b_2}, \ldots, S_{b_k}$ $(b_1 < b_2 < \cdots < b_k)$ を出す場合の数と $S_{12-b_k}, S_{12-b_{k-1}}, \ldots, S_{12-b_1}$ を出す場合の数が一致している（なぜなら $\spadesuit$ で出すか $\clubsuit$ で出すかを選択できる回数が一致しているため）ことから，$\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \neq \{12-b_k, 12-b_{k-1}, \ldots, 12-b_1\}$ であるような出し方は全部合わせると偶数通りである．よって $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \{12-b_k, 12-b_{k-1}, \ldots, 12-b_1\}$，すなわち

$$\text{すべての } n = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ について } S_n \text{ を出すかと } S_{12-n} \text{ を出すかが一致している} \tag{*}$$

場合のみ考えたらよい．この条件下でさきほどの (I)〜(III) を考える．

(I) 条件 $(\boxed{*})$ を満たす場合はない．
(II) このとき S_4 は出せない．条件 $(\boxed{*})$ を満たすとすれば，S_8 は出さず，S_9, S_{10} を出し，S_{11} を出さない．S_5, S_6, S_7 についても条件 $(\boxed{*})$ を満たすのは, S_5, S_6, S_7 のいずれも出さない場合（$\spadesuit$ と $\clubsuit$ の選択によって 2 通り），S_6 だけ出す場合（$\spadesuit$ と $\clubsuit$ の選択によって 4 通り），S_5 と S_7 を出す場合（1 通り）であり，計 7 通りであるある．
(III) 条件 $(\boxed{*})$ より S_9, S_{10}, S_{11} は出さない．$S_4, \ldots, S_8$ に対して (a)〜(c) と同様の議論と条件 $(\boxed{*})$ に関する議論を行うと，考えるべきは $S_4, \ldots, S_8$ のいずれも出されない場合 1 通りだけ．

以上より $a_2+a_1+a_0$ 偶数である．$a_1+a_0=88$ なので a_2 は偶数である．

以上の議論から，$4!=24$ を法として $N=4!a_4+4!a_3+4\cdot 3a_2+4a_1+a_0 \equiv 4a_1+a_0=4\times 87+1 \equiv 4\times 15+1=61 \equiv \mathbf{13}$.

(5) コンピューターを用いて $N=2078413$ であると計算できる．以下にその手法を載せる．

T_k で「$k-2, k-1, k$ からなるいずれかのマークの階段」を表すとする．$n \geq 4$ とする．「1」, . . . ,「n」のカードを使って出す場合の数のうち, T_{n-1}, T_n をいずれも用いない場合の数を a_n とし, T_{n-1} を用いず T_n を用いる場合の数を b_n とし，T_{n-1} を用いて T_n を用ない場合の数を c_n と，T_{n-1} と T_n をいずれも用いる場合の数を d_n とすれば，漸化式

$$a_{n+1}=a_n+c_n$$
$$b_{n+1}=4a_n+3c_n$$
$$c_{n+1}=b_n+d_n$$
$$d_{n+1}=3b_n+2d_n$$

を得る．$(a_4, b_4, c_4, d_4)=(1, 4, 4, 12)$ から漸化式を用いて $N=a_{13}+b_{13}+c_{13}+d_{13}$ が計算できる．　□

京都マス･フェス2025　2ndステージ　京都数学オリンピック道場 使用問題

4 a , b は正の整数とする。3 次関数 $y=x^3-ax^2+bx-b$ と x 軸の交点が格子点となるような点が少なくとも 2 点存在するような a , b の組を全て求めよ。

ただし、3 次方程式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ が実数解 $x=\alpha$, β , γ $(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ をもつとき、

解と係数の関係 $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{a_1}{a_0}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{a_2}{a_0}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{a_3}{a_0}$ が成立することを用いてもよい。

（オリジナル問題）

3 次関数 $y=x^3-ax^2+bx-b$ と x 軸の交点について考えるために，3 次方程式 $x^3-ax^2+bx-b=0$ を考える。この 3 次方程式が実数解 $x=\alpha$, β , γ をもつとき（α , β , γ は必ずしも異なるものでなくてもよい。)，3 次方程式の解と係数の関係により，

$\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=b$

が成立する。 交点が格子点になる場合を考えるので，以下では α , β , γ は整数であるとして考える。

ここで $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ としても一般性を失わない。

$\alpha\beta\gamma=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leqq3\beta\gamma$

より，$\alpha\leqq3$が成立する。

ここで α , β , γ の少なくとも 1 つが 0 であると仮定すると，$\alpha\beta\gamma=b>0$に矛盾する。 また，$\alpha<0$ であると仮定すると，$\alpha\beta\gamma=b>0$より，$\beta<0$, $\gamma>0$でなければならない。　このとき $\alpha\beta>0$, $\beta\gamma<0$, $\gamma\alpha<0$となり，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ であることを考えれば$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha<0$となり矛盾する。

以上より $\alpha=1$, 2 , 3 が必要条件であることが分かる。

(i) $\alpha=1$のとき

$\beta\gamma=\beta+\beta\gamma+\gamma$となり矛盾する。

(ii) $\alpha=2$のとき

$2\beta\gamma=2(\beta+\gamma)+\beta\gamma$ より $(\beta-2)(\gamma-2)=4$ となる。

よって $(\alpha, \beta, \gamma)=(2, 3, 6), (2, 4, 4)$

(ii) $\alpha=3$のとき

$3\beta\gamma=3(\beta+\gamma)+\beta\gamma$ より $(2\beta-3)(2\gamma-3)=9$ となる。

よって$(\alpha, \beta, \gamma)=(3, 2, 6), (3, 3, 3)$である。

しかし，$(\alpha, \beta, \gamma)=(3, 2, 6)$ は$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ より不適。

$(\alpha, \beta, \gamma)=(3, 3, 3)$ は 3 次関数のグラフと x 軸の交点が 1 個であるので不適。

(i)〜(iii)より

$(\alpha, \beta, \gamma)=(2, 3, 6), (2, 4, 4)$である。 $\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=b$ より

$(a, b)=(11, 36), (10, 32)$