$\boxed{1}$ 自然数 n に対し，n の各桁の和を $s(n)$ で表す。たとえば，$s(2025)=2+0+2+5=9$ である。

$N=2027^{2026^{2025}}$ のとき $s(s(s(s(N))))$ を求めよ。

解答例

自然数 n について $s(n)\equiv n\ (\mathrm{mod}\ 9)$ であるので

$s(s(s(s(N))))\equiv s(s(s(N)))\equiv s(s(N))\equiv s(N)\equiv N\ (\mathrm{mod}\ 9)$　……①

$2027\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 9)$ であるから，$N\equiv 2^{2026^{2025}}\ (\mathrm{mod}\ 9)$

2^n を 9で割ったときの余りは下の表のようになり，周期 6 で同じ値が現れる。

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$2^n \mod 9$	2	4	8	7	5	1	2	$\cdots$

2026^{2025} は偶数であり、さらに$2026^{2025}\equiv 1^{2025}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ であるから　$2026^{2025}\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 6)$

したがって $N\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 9)$ であるから，①より　$s(s(s(s(N))))\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 9)$　……②

次に，n が d 桁以下の自然数であるとき，すなわち $n<10^d$ のとき，$s(n)\leqq 9d$ である。　……$(*)$

$2026<10^4$ であるから，$2026^{2025}<(10^4)^{2025}=10^{8100}$

また $2027<10^4$ であるから，$N=2027^{2026^{2025}}<(10^4)^{10^{8100}}=10^{4\times 10^{8100}}<10^{10^{8101}}$

したがって $(*)$ より $s(N)\leqq 9\times 10^{8101}<10^{8102}$

もう一度 $(*)$ を用いて $s(s(N))\leqq 9\times 8102<10^5$

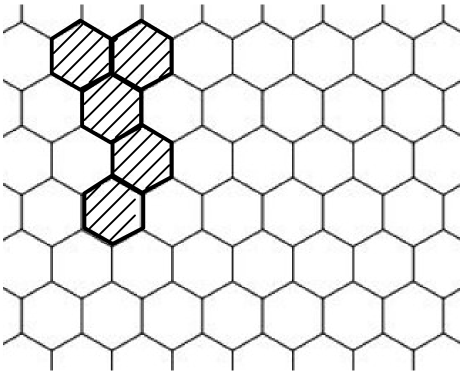
もう一度 $(*)$ を用いて $s(s(s(N)))\leqq 9\times 5=45$

45以下の自然数 n について，$s(n)$ が最大になるのは $n=39$ のときの $s(n)=12$

よって　$s(s(s(s(N))))\leqq 12$　……③

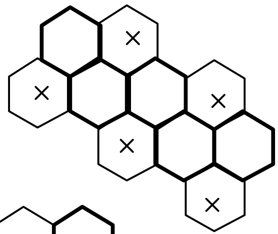
②③より　$s(s(s(s(N))))=7$

2 右図のように平面上に正六角形が隙間なく並んでいる。
辺で隣り合うように５つの六角形を選ぶとき，選び方は何通りあるか。
ただし，平行移動すると一致するものは同じものとして数え，
反転や回転で一致するものは異なるものとして数える。



解答例

(１) 三角形の構造を持たず，ひも状につながるとき

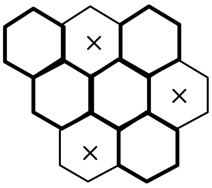


(Ⅰ) 分岐をしないとき

逆方向から考えたものが重複することに注意して

$6\cdot3\cdot3\cdot3\div2=81$ (通り)

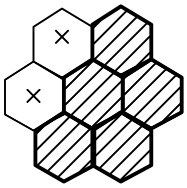
(Ⅱ) 分岐をするとき



分岐の中心から考え，上下の区別に注意して

$3\cdot3\cdot2=18$ (通り)

(２) 三角形状の構造があるとき

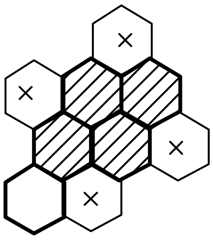


(Ⅰ) 台形状の構造があるとき

へこみ部分の方向を考えて

6 (通り)

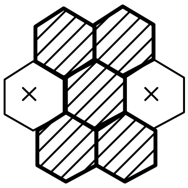
(Ⅱ) 台形状の構造がないとき



(ｉ) ダイヤ状の構造があるとき

出っ張り部分(右図白色六角形)を考えて

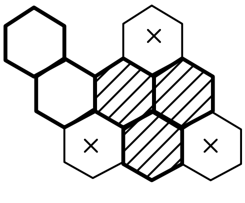
$6\cdot3=18$ (通り)



(ⅱ) X状の構造があるとき

へこみ部分の方向を考えて

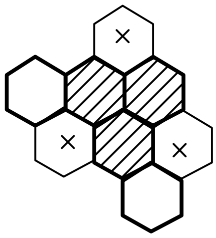
3 (通り)



(ⅲ) 台形、ダイヤ状、X状のいずれの構造もないとき

［１］ 三角形状の構造＋ ひも状の構造の場合

$6\cdot3\cdot2=36$ (通り)



［２］ 三角形状の構造＋２個の六角形の場合

$({}_6C_2-3)\cdot2=12\cdot2=24$ (通り)

以上より

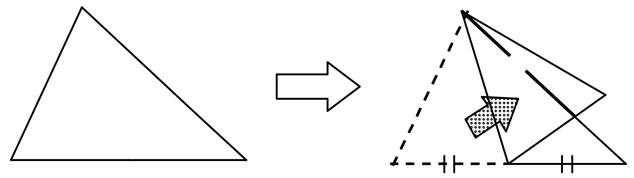
$81+18+6+18+3+36+24=186$ (通り)

3 太郎さんと花子さんが三角形の折り紙を手に取り，先生と話し合いながら三角形の性質を見出そうとしている。次の文章を読み，後から提示する問いに答えよ。

太郎さん： 三角形の折り紙を2つの頂点が重なるように折れば，各辺の中点に印をつけることができるよね。各頂点と対辺の中点を結ぶ折り目をつけると，3つの折り目は1点で交わったよ。

花子さん： ほんとだね。3直線が1点で交わるときは特別な場合だったよね。

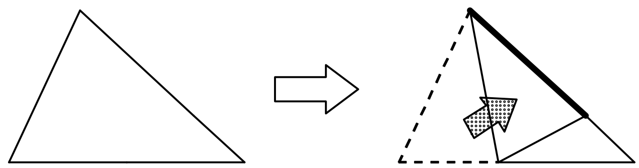
折り目Ⅰ：頂点とその対辺の中点を結ぶ折り目をつける。



太郎さん： 実は他のパターンも見つけているよ。2辺が重なるように折るんだ。どの2辺に対してもこの折り目をつけると，3つの折り目は1点で交わるんだ。

花子さん： 確かに1点で交わっているね。… 思い出した。これは中学校でも高校でも習った三角形の性質のことだよね。

折り目Ⅱ：2辺が重なるように折り目をつける。



先　生： よく気付いたね。他にもこんな点はないかなあ。3つの折り目が1点で交わるような他の折り方を見つけてみよう。

～～数分後～～

花子さん： さっきの折り目を使った例を見つけたよ！

太郎さん： さっきの折り目を活用して！？一体どんな折り目を付けたんだ？

花子さん： 1つの頂点に対して折り目Ⅰを山折りにし，その頂点を通る折り目Ⅱを谷折りにするんだ。その状態で，折り目Ⅰと重なるような新しい折り目をつけてみて。3つすべての頂点に対してこの折り目をつけると，3つの折り目は 1点で交わったよ。

折り目Ⅲ：1つの頂点について，折り目Ⅰを山折りに，その頂点を通る折り目Ⅱを
谷折りにした状態で，折り目Ⅰと重なるような折り目をつける。

太郎さん： ほんとだ！これは知らない性質だね。

先　生： その通り。よく見つけました。どんな三角形に対しても折り目Ⅲを3つすべての頂点に対してつけると，1点で交わることが知られています。また，その点には面白い性質がたくさんあります。では，その点について，考察してみましょう。

問1． △ABCの辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cとする。△ABCの各頂点に対する3つの折り目Ⅲの交点をKとし，点Kと辺BC，CA，ABの距離をそれぞれd_1，d_2，d_3とする。このとき，比$d_1：d_2：d_3$を求めよ。

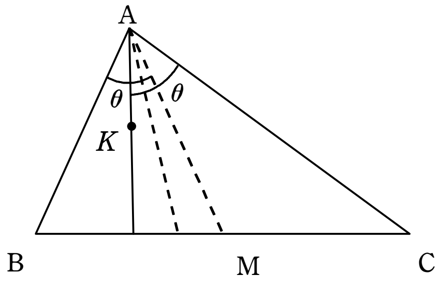
問2． 問1で考えた点Kに関する性質について，自由に考察せよ。

解説

問1．

折り目Ⅰは各頂点から引いた中線であり，折り目Ⅱは角の二等分線である。

辺BCの中点をMとし，∠BAM＝∠CAK＝θ とする。



$$\frac{d_3}{d_2}=\frac{\mathrm{AK}\sin(\mathrm{A}-\theta)}{\mathrm{AK}\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\mathrm{A}\cos\theta-\cos\mathrm{A}\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=\sin\mathrm{A}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\cos\mathrm{A}$$

ここで，$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ を a，b，c および $\sin\mathrm{A}$ で表す。

中線定理より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

よって，$c^2+b^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\dfrac{a^2}{4}\right)$ より，$\mathrm{AM}^2=\dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$

△ABM について余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{c^2+\mathrm{AM}^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{2c\mathrm{AM}}=\frac{3c^2+b^2-a^2}{4c\mathrm{AM}}$$

また，△ABM について正弦定理より，

$$\frac{\dfrac{a}{2}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{AM}}{\sin\mathrm{B}}\qquad\therefore\ \sin\theta=\frac{a\sin\mathrm{B}}{2\mathrm{AM}}$$

したがって，

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{3c^2+b^2-a^2}{4c\mathrm{AM}}\times\frac{2\mathrm{AM}}{a\sin\mathrm{B}}=\frac{3c^2+b^2-a^2}{2ac\sin\mathrm{B}}$$

よって，

$$\frac{d_3}{d_2}=\sin\mathrm{A}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\cos\mathrm{A}=\sin\mathrm{A}\frac{3c^2+b^2-a^2}{2ac\sin\mathrm{B}}-\cos\mathrm{A}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{3c^2+b^2-a^2}{2ac}-\cos\mathrm{A}\quad\left(\because\triangle\mathrm{ABC}\text{について正弦定理より，}\frac{\sin\mathrm{A}}{\sin\mathrm{B}}=\frac{a}{b}\right)$$

$$=\frac{3c^2+b^2-a^2}{2bc}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\quad(\because\triangle\mathrm{ABC}\text{について余弦定理})$$

$$=\frac{c}{b}$$

したがって，$d_2:d_3=b:c$

同様に，$d_1:d_3=a:c$　　　よって，$d_1:d_2:d_3=a:b:c$

問2．

例1．　<u>△KBC : △KCA : △KAB＝a^2: b^2: c^2</u>

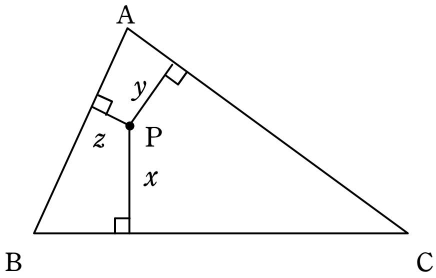
問1より，△KBC : △KCA : △KAB＝$\dfrac{1}{2}a\cdot d_1:\dfrac{1}{2}b\cdot d_2:\dfrac{1}{2}c\cdot d_c=a^2:b^2:c^2$

例2．

<u>△ABC 内の点 P から BC, CA, AB に下ろした垂線の長さをそれぞれ x, y, z とするとき，</u>

<u>$x^2+y^2+z^2$ の値を最小にするのは $x:y:z=a:b:c$ のとき，すなわち，点 P が点 K と一致するときである。</u>

コーシー・シュワルツの不等式より，



$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

（等号成立条件は $x:y:z=a:b:c$）

したがって，　$x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{(ax+by+cz)^2}{a^2+b^2+c^2}$

ここで，△ABCの面積を S とすると，$ax+by+cz=2S$ より，

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2} \quad \text{（等号成立条件は } x:y:z=a:b:c \text{）}$$

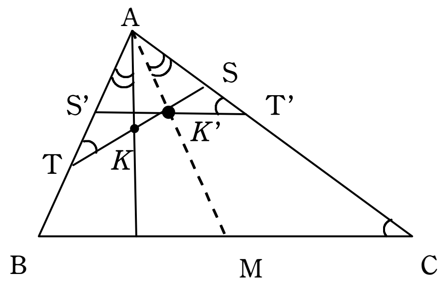
よって，点 P が点 K と一致するとき，$x^2+y^2+z^2$ は最小値をとる。

例 3．

△ABCについて，辺AC 上に点S，辺AB 上に点T をとる（ただし，2 点S,T は 点A,B,C とは異なる）とき，次が成り立つ。

直線AK が線分ST の中線となるならば，∠ACB＝∠ATS

（すなわち，線分ST と線分BC は逆平行である。）



辺AB 上にAS＝AS'をみたす点S'，辺AC 上にAT＝AT'をみたす点T'をとる。また，AM とS'T'の交点をK'とする。

∠A は共通より，△AST ≡ △AS'T'

また，∠TAK＝∠T'AK'より，△ATK ∽ △AT'K'

このことから，KT＝K'T'，仮定より，SK＝KT

KT：ST＝K'T'：S'T'＝1：2

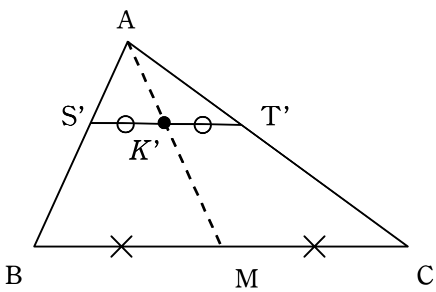
よって，△ABC の点A から引いた中線AM は線分S'T'の中線である。

これより，S'T'∥BC　…（※）

したがって，∠ACB=∠AT'S'＝∠ATS

（※）の証明，すなわち，

△ABC について，辺AC 上に点S'，辺AB 上に点T'をとる（ただし，2 点S',T'は点 A, B, C とは異なる）。△ABC の点A から引いた中線AM と直線S'T'との交点をK'とするとき，S'K'＝T'K'ならば，S'T'∥BC を示す。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，点K'は

直線AM上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=k\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$（$k$ は実数）

と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{AS'}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AT'}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$s, t$ は実数）とおくと，

仮定より，$\overrightarrow{\mathrm{S'T'}}=2\overrightarrow{\mathrm{S'K'}}$ と表されるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT'}}-\overrightarrow{\mathrm{AS'}}=2(\overrightarrow{\mathrm{AK'}}-\overrightarrow{\mathrm{AS'}})$$

$$t\vec{c}-s\vec{b}=2\left(k\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-s\vec{b}\right) \quad \text{よって，} \quad -s\vec{b}+t\vec{c}=(k-2s)\vec{b}+k\vec{c}$$

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は一次独立であるから，$-s=k-2s, t=k$

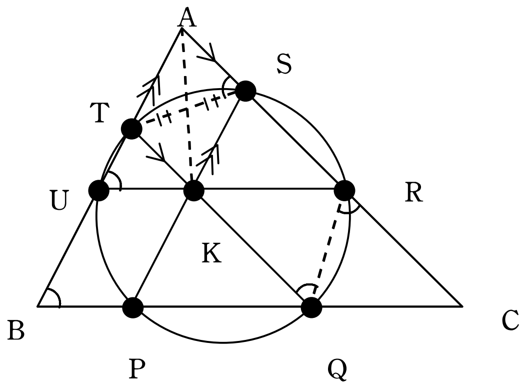
これを解いて，$s=t$ であるから，

AB: AS'＝1: s，AC: AT'＝1: t より，AB: AS'＝AC: AT'

よって，平行線と線分の比より，S'T'∥BC1

例4．

<u>点Kを通り、△ABCの各辺に平行に引いた直線と辺との６つの交点は同一円周上にある。</u>



右図において，四角形 ATKS は平行四辺形なので，

AK は ST を二等分する。

よって，例 3 より，∠AST＝∠ABC

よって，∠AST＝∠AUR

ゆえに，４点 R,S,T,U は同一円周上にある。

この円を C_1 とする。

同様に，四角形 PQRS も同一円周上にある。

この円を C_2 とする。

ここで，∠TUR＝∠TQR より 4 点 Q, R, T, U は同一円周上にある。

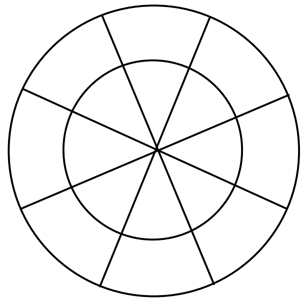
よって，円 C_1 と C_2 は一致するから，６点 P, Q, R, S, T, U は同一円周上にある。

補足

重心や内心に代表される「三角形の心（中心）」を題材にしたく，折り紙を用いて表現できるかつ初等幾何で性質を証明できる心として「類似重心（ルモワーヌ点）」を取り上げた。初めから中線や角の二等分線を与えるのではなく，折り目から気づかせたく，会話形式の問題を作成した。

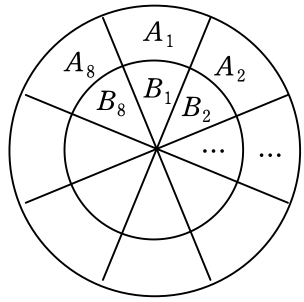
また，問２の例４について，この円は第１ルモワーヌ円，または単にルモワーヌ円と呼ばれている。このルモワーヌ円に関する諸性質もたくさん知られている。

4 右図の 16 個のエリアに，赤・青・黄のいずれかの色を塗る。
線分か円弧を共有して隣り合うエリアには異なる色を塗るとき，塗り方は何通りか。
ただし，反転や回転で重なり合う塗り方も異なるものとして数える。



解答例①

図のようにエリアに番号を振る。

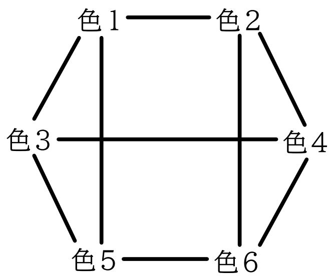


$(A_k, B_k)=$(赤, 青), (青, 赤), (青, 黄), (黄, 青), (黄, 赤), (赤, 黄) のいずれか。

それぞれの色の組を色 1, 色2, 色3, ..., 色6とする。

このとき可能な組み合わせは右の通り。

(A_k, B_k)の組	(A_{k+1}, B_{k+1})の組
色1	色2, 色3, 色5
色2	色1, 色4, 色6
色3	色1, 色4, 色5
色4	色2, 色3, 色6
色5	色1, 色3, 色6
色6	色2, 色4, 色5



よって、求める塗り方の数は

右のグラフ上の点を 8 回移動して元の点に戻ってくる経路の数に等しい。　……(*)

このグラフの隣接行列（数学C）は

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ であり，

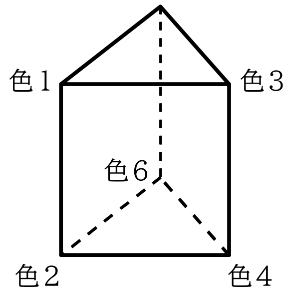
$$M^8=\begin{pmatrix} 1179 & 1008 & 1051 & 1136 & 1051 & 1136 \\ 1008 & 1179 & 1136 & 1051 & 1136 & 1051 \\ 1051 & 1136 & 1179 & 1008 & 1051 & 1136 \\ 1136 & 1051 & 1008 & 1179 & 1136 & 1051 \\ 1051 & 1136 & 1051 & 1136 & 1179 & 1008 \\ 1136 & 1051 & 1136 & 1051 & 1008 & 1179 \end{pmatrix}$$ であるから，求める数は $1179\times 6=7074$（通り）

解答例②

(*) までは ① と同様

色 5

このグラフは、図のようにすれば三角柱の構造をしている。



・上面の三角形：色1, 色3, 色5

・下面の三角形：色2, 色4, 色6

このグラフの移動を、以下の3種類に分けて考える。

・L（左回り）：三角形の辺に沿って左回りに移動（1→3→5→1、2→4→6→2）

・R（右回り）：三角形の辺に沿って右回りに移動（1→5→3→1、2→6→4→2）

・S（上下移動）：上下をつなぐ柱を移動（1⇄2、3⇄4、5⇄6）

それぞれの操作の回数をl、r、sとすると、経路の長さは8であるから、

$$l+r+s=8$$

また、はじめの頂点に戻ってくるために、sは偶数で、また$l-r$は3の倍数でなくてはならない。

これらの条件を満たす(l, r, s)の組を全て列挙すると、次の9つの組がある。

$(7, 1, 0)$ 8通り

$(4, 4, 0)$ 70通り

$(1, 7, 0)$ 8通り

$(6, 0, 2)$ 28通り

$(3, 3, 2)$ 560通り

$(0, 6, 2)$ 28通り

$(2, 2, 4)$ 420通り

$(1, 1, 6)$ 56通り

$(0, 0, 8)$ 1通り

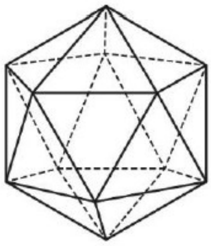
それぞれの並び替えは上の表の通りで、総数は1179通り。

はじめにどの頂点から出発するかを考えて、答えは$1179\times6=7074$通り。

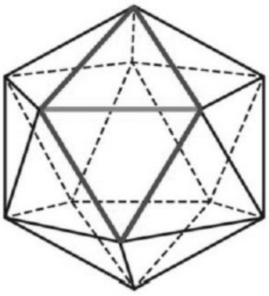
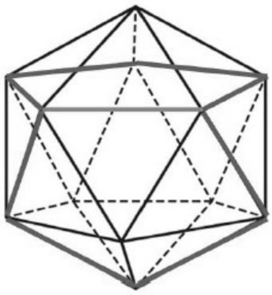
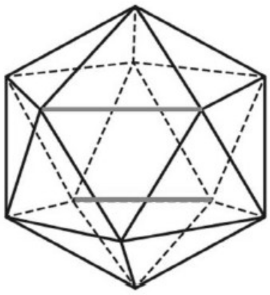
$\boxed{5}$ 空間内に一辺が1の正二十面体がある。このとき，以下の問いに答えよ。

（1） 正二十面体の辺をちょうど n 本含むような平面が存在するような n の値のうち，2以上のものをすべて求めよ。

（2） （1）で求めた各 n について，正二十面体と（1）の平面の共通部分の面積としてあり得る値を全て求めよ。



(解)ある辺を基準にし、その辺とねじれの位置にある辺は同一平面上になりえないので、A_n が存在する場合は以下の三つのみ

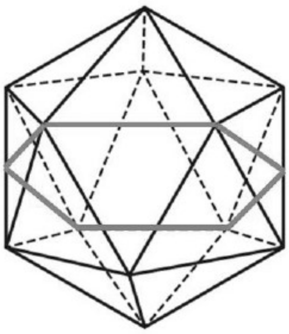




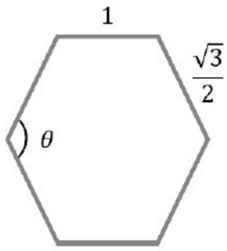
紫線を含む場合は $\boldsymbol{n=3}$ であり、$A_3 = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

青線を含む場合は $\boldsymbol{n=5}$ であり、正五角形の一辺の長さと対角線の長さに関して相似関係より比例式を解くと $\cos\frac{\pi}{5}$ の値が求まるので、$\tan\frac{\pi}{5}$ も求まる。よって

$$A_5 = 1 \times \frac{1}{2\tan\frac{\pi}{5}} \times \frac{1}{2} \times 5 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{5}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{25}+\mathbf{10}\sqrt{\mathbf{5}}}}{\mathbf{4}}$$

緑線を含む場合は以下のような断面となるので $\boldsymbol{n=2}$ であり、立体の対称性から断面は辺の中点を通る六角形であることがわかる。





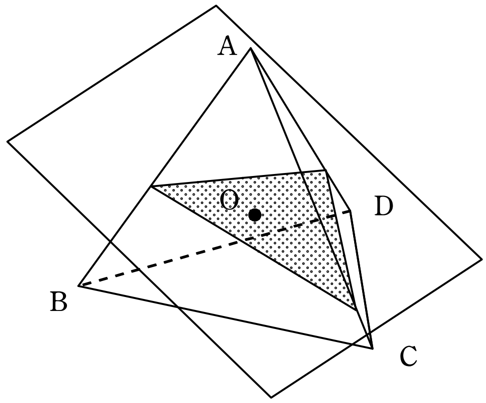
辺の中点を通るところの二面角 θ はその両側の長さ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の二辺を含む二等辺三角形に注目すると、頂角が θ、対辺が正五角形の対角線の長さ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ であるから、余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{3+3-\left(6+2\sqrt{5}\right)}{2\times 3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$0 < \theta < \pi$ であるから $\sin\theta > 0$ であり、$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$

以上より $A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}$

$\boxed{6}$ 一辺が１の正四面体ABCDの，４頂点を通る球の中心をOとする。
Oを通り，A，B，C，Dを通らない平面で，正四面体ABCDを，
頂点Aを含む図形と頂点B，C，Dを含む図形に分割する。
分割した図形のうち頂点Aを含むものについて，
その体積の最小値を求めよ。



解答例

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。重心をGとするとき，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

平面と辺AB,AC,ADの交点をそれぞれP,Q,Rとする。

$\overrightarrow{AP}=x\vec{b}$，$\overrightarrow{AQ}=y\vec{c}$，$\overrightarrow{AR}=z\vec{d}$ とおける。$(0<x<1,\ 0<y<1, 0<z<1)$

$\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ は一次独立だから，実数 α,β,γ を用いて $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AP}+\beta\overrightarrow{AQ}+\gamma\overrightarrow{AR}$ とかける。

このとき　$\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\alpha x\vec{b}+\beta y\vec{c}+\gamma z\vec{d}$　から　$\alpha x=\beta y=\gamma z=\frac{1}{4}$ なので　$\alpha=\frac{1}{4x}, \beta=\frac{1}{4y}, \gamma=\frac{1}{4z}$

平面PQRが点Gを通るとき，$\alpha+\beta+\gamma=1$ より $\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}=1$　……①

さて，四面体APQRの体積の最小値は xyz が最小であるときに実現される。

相加相乗平均の大小関係と①から $1=\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{4z}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{64xyz}}=\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}$ なので，$\sqrt[3]{xyz}\geqq\frac{3}{4}$

よって $xyz\geqq\frac{27}{64}$ で、等号は $x=y=z=\frac{3}{4}$ のときに成り立つ。よって xyz の最小値は $\frac{27}{64}$

求める最小値は，（ABCDの体積）$\times\frac{27}{64}=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\frac{27}{64}=\frac{9\sqrt{2}}{256}$