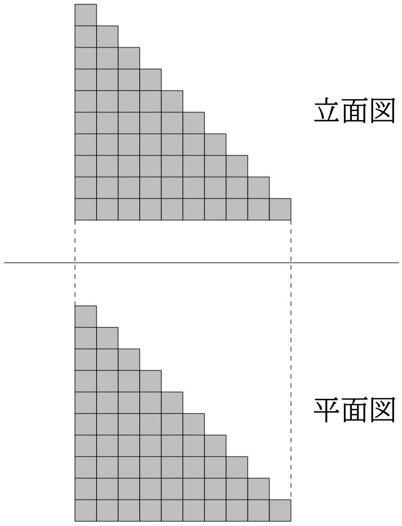
1 一辺が 1 の立方体の形をしたブロックが無数にある。 これらのうちのいくつかを以下の規則に従って配置することでできる立体のうち, 投影図が下図になるものの総数と, そのうち体積が381であるものの総数をそれぞれ求めよ。なお, この問題の末尾にヒントがあるので, 必要ならば参考にせよ。



規則

(1) ２つのブロックのある面同士が重なるならば, それらの面は完全に重なるように配置する。

(2) ２段目以降にブロックを配置できるのは, その真下に既にブロックが配置されている場合に限る。

ヒント

投影図が上のようになる配置のうち, 用いるブロックの個数が最大となるような配置において, 用いるブロックの個数はいくつか。

（新作問題）

解答

１段目には平面図と合同な図形ができるようにブロックを配置する必要があり, さらに右から i 列目にあるブロックのうち少なくとも1 つの上にブロックをちょうど $i-1$ 個積み上げる必要があるが, それ以外のブロックの上には追加で 0 個以上 $i-1$ 個以下ならブロックを積み上げて良い。よって, 投影図が上のようになるものの総数は,

$$\prod_{i=1}^{10}\{i^i-(i-1)^i\}\ (=642046125100834318300987569711432127758875)$$

ただし, 数列 a_1 , a_2 , ……, a_n , に対して $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n$ である。 また, 投影図が問題文のようになる配置のうち, ブロックの個数が最大になるのは, 右からi 列目の1 段目にあるブロック全ての上にちょうど $i-1$ 個のブロックを積み上げる配置のみであるが, それによってできる立体の体積は,

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$$

である。よって, 体積が 381 である配置は, 投影図が変わらないようにこの配置からブロックをちょうど 4 個取り除く方法の総数に等しい。 規則(2) より, 取り除けるブロックは各時点で最上段に配置されたブロックに限るが, 1 段目にあるブロックは取り除いてはならない。初期状態で最上段にあるブロックの総数は,

$$\sum_{i=1}^{10} i=55$$

であり, 右から i 列目にあるブロックのうち, 手前から数えて同じ行にあるものは $i-1$ 個までしか取り除くことができないことに注意すると, 取り除くブロックとして選べるのは最大でも54 個である(一番右の列にある1 個は取り除いてはならない)。よって, ${}_{54}\mathrm{H}_4$ から, 右から i 列目にあるブロックのうち, 手前から数えて同じ行にあるものを i 個以上取り除く配置に対応するものを引けば良い。まず, 右から i 列目にあるブロックのうち, 手前から数えて同じ行にあるものを4 個取り除く場合を考える。このとき, 手前から数えて何行目のものを取り除くかで i 通りの選び方が生じるから, 規則に反するものは全部で $2+3+4=9$ 通りある。次に, 右からi 列目にあるブロックのうち, 手前から数えて同じ行にあるものを 3 個取り除く場合を考える。このとき, さらに追加で 1 個取り除く必要があるが, それは先に 3 個取り除いたところ以外から選ぶ必要があるので, 53 通りある。よって, 規則に反するものは全部で $(2+3)\cdot 53=265$ 通りある。次に, 右から i 列目にあるブロックのうち, 手前から数えて同じ行にあるものを2 個取り除く場合を考える。このとき, 追加で取り除く 2 個のブロックの選び方のうち, 先に 2 個取り除いた場所から 1 個か 2 個ブロックを取り除く選び方はできないので, 規則に反するものは全部で $2\cdot({}_{54}\mathrm{H}_2-1-53)-1$ (通り)ある。よって, 求める総数は,

$${}_{54}\mathrm{H}_4-9-265-2\cdot({}_{54}\mathrm{H}_2-54)+1={}_{57}\mathrm{C}_4-2\cdot{}_{55}\mathrm{C}_2-165=74085$$

である。

2 n を自然数とする。55 枚のカードがあり, それぞれには n 種類のマークのうち相異なる８つのマークが描かれている。これらのカードからどの２枚を選んでも, その２枚のカードに共通するマークがただ 1 つある。このとき $n \geqq 57$ を示せ。
（新作問題）

解答

n 種類のマークに番号を振り, マーク 1 , マーク 2 , . . . , マーク n と呼ぶことにする。これらのマークに対応する n 点を打ち, 点 1 , 点 2 , . . . , 点 n とする。各カードについて, マーク i とマーク j が描かれているときに点 i と点 j を結ぶ（図1）。

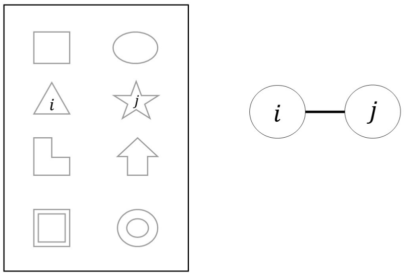


図 1　マーク i とマーク j が描かれたカード（左）, 点 i と点 j を結ぶ線（右）

例えば 1 枚目のカードのマークが 1 , 2 , . . . , 8 だとすると, 点 1, 2 , . . . , 8 のどの 2 点間にも線を引き, 図 2 のようにする。

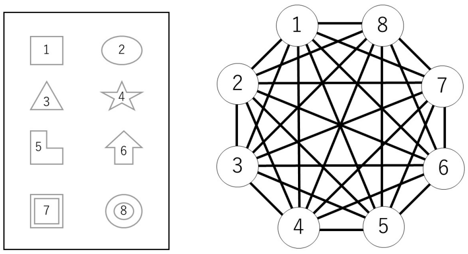


図 2　1 枚目のカード（左）, このカードのマークに対応する 8 点を結ぶ ${}_8\mathrm{C}_2 = \dfrac{56}{2}$ 本の線（右）

続いて 2 枚目のカードのマークが 1 , 9 , 10 , . . . , 15（ 1 枚目のカードとただ 1 つ共通するのはマーク 1 ）だとすると, 図 3 のように線を追加する。

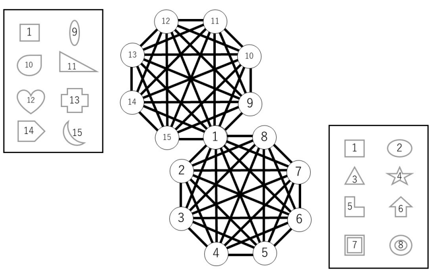


図 3　1 , 2 枚目のカード（左）, このカードのマークに対応する 15 点を結ぶ ${}_8\mathrm{C}_2 \times 2 = \dfrac{56}{2} \times 2$ 本の線（右）

これをすべてのカードについて行う. カード 1 枚あたり ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2}=\dfrac{56}{2}$ 本の線を引くため, この図の全体にはカード 55 枚分の $\dfrac{56\cdot 55}{2}$ 本の線がある。

図 4 のように, どの2 点 i , j 間の線も1 本以下であることを示す。点 i , j 間の線の本数はマーク i , j が共に描かれているようなカードの枚数である。よって i , j 間に2 本以上の線があれば, マーク i , j が共に描かれているようなカードが 2 枚以上ある。それらのカードから選んだ2 枚のカードにはマーク i もマーク j も共通するため問題の条件に反する。よってどの2 点 i , j 間の線も1 本以下である。

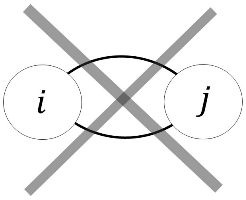


図 4　どの2 点 i , j 間にも2 本以上線が引かれることはない

どの2 点間の線も 1 本以下となるように n 点を線で結ぶとき, 線の最大本数は, どの 2 点も線で結ばれている場合の $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (本)である。今, $\dfrac{56\cdot 55}{2}$ (本)の線が引かれていたため $n\geqq 56$ となる。

次に $n=56$ で問題の条件が実現できないことを示す。 マーク 1 が描かれたカード 1 枚につき, 点 1 から 7 本の線が引かれている。そのため点 1 から引かれている線の合計本数は 7 の倍数である(図5)。

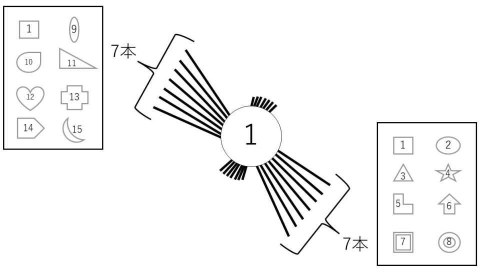


図 5　点 1 からは 7 の倍数本の線が引かれている。

しかし $n=56$ のとき, 線は前段落で述べた最大の本数が引かれており, 点 1 は残りの 55 点すべてと結ばれている。55 は 7 の倍数でないため矛盾である。以上より $n\geqq 57$ である。

参考

カードゲーム「ドブル」

この問題はドブルというカードゲームが基になっています。これは問題の設定にあるような 55枚のカードを用いるゲームで, 同時に 2 枚のカードを引き, 共通するただ 1 つのマークを最初に言い当てた人が勝ち（もしくはその人が点を獲得）となります。

グラフ理論

上の解答例で構成した点と線による図はグラフと呼ばれます（関数の形状を表すグラフとは異なるので注意してください）。点は頂点, 線は辺と呼ばれます[1)]。解答例ではどの 2 点間にも辺が 1 本以下しかありませんでした。 このようなグラフを単純グラフと言います。 $n \geqq 55$ を示したときに使った性質は「 n 頂点からなる単純グラフの辺は最大でも $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (本) しかない」です。

グラフ理論は実社会に広く活用されています。例えばカーナビは, グラフ上で与えられた 2 頂点間の最短経路を求めるプログラムとして作られています。この他にも最適輸送, 通信網の頑健性評価など様々な場面でグラフ理論は活用されています。

$n=57$ で問題の状況が実現できることの証明

実は $n=57$ であれば問題の条件を満たすような 55 枚のカードを構成できます。しかも以下の証明によって同様の性質をもつカードを 57 枚まで用意できることも分かります。

考え方

まずマーク 1 が描かれたカードをできるだけ用意します。マーク 1 とマーク 2 ～ 8 が描かれたカード, マーク 1 とマーク 9 ～ 15 が描かれたカード, . . . , マーク 1 とマーク51～57 が描かれたカードの 8 枚が用意できます（図6）.

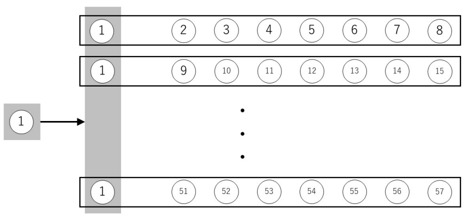


図 6　マーク 1 が描かれた 8 枚のカード

これ以上マーク1が描かれたカードが用意できないことが分かります。そこで次にマーク2が描かれたカードをできるだけ用意してみましょう。ただし(図6)のように横一列にマークを選んでしまうとさきほど用意したカードとマークが2つ以上共通してしまうので, 今度は縦に $9, 9+7, \ldots, 9+7\cdot 6$ のようにして7つのマークを選び, 7枚のカードを作ります（図7）。

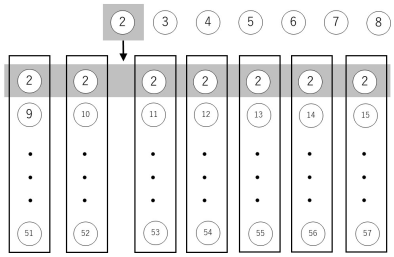


図7　マーク2が描かれた7枚のカード

2が描かれたカードはこれ以上用意できません。今度は3が描かれたカードを用意します。縦の選び方は使ってしまったので, 1つずつずらしながら $9, 9+7+1, 9+7\cdot 2+2\ldots, 9+7\cdot 6+6$ のように選びます。

後は同様にして, 4が描かれたカードは2つずつずらしながら選び, 5が描かれたカードは3つずつずらしながら選び, . . . とします。

証明

集合 $C_{(k,\ l)}$ を

$$C_{(1,\ l)}=\{1\}\cap\{7l+2, 7l+3, \ldots, 7l+8\} \qquad (0\leqq l\leqq 7)$$

$$C_{(k,\ l)}=\{k\}\cap\{9+7i+((l+i(k-2)) \bmod 7) \mid 0\leqq i\leqq 6\} \qquad (2\leqq k\leqq 8 \text{ かつ } 0\leqq l\leqq 6)$$

と定める[2)]。ただし $(l+i(k-2)) \bmod 7$ は $l+i(k-2)$ を7で割った余りを表す。このとき $C_{(k,\ l)}$ は8個の要素からなる。以下で $(k, l)\fallingdotseq(k', l')$ のときに $C_{(k,\ l)}\cap C_{(k',\ l')}$ がただ1つの要素からなることを示す。これが示せたら, 各 $C_{(k,\ l)}$ に含まれる番号のマークがえがかれた $8+7\cdot 7=57$ 枚のカードを用意することで問題の状況が実現される（57枚のうちどの55枚を選んでもよい）。「$k<k'$」または「$k=k'$ かつ $l<l'$」であるとしてよい。

- $k=k'=1$ のとき $C_{(k,\ l)}\cap C_{(k',\ l')}=\{1\}$
- $k=1<k'$ かつ $l=1$ のとき $C_{(k,\ l)}\cap C_{(k',\ l')}=\{k\}$
- $k=1<k'$ かつ $l>1$ のとき $C_{(k,\ l)}\cap C_{(k',\ l')}=\{7l+2+((l'+(l-1)(k'-2)) \bmod 7)\}$
- $1<k=k'$ のとき, $C_{(k,\ l)}\cap C_{(k',\ l')}=\{k\}$
- $1<k<k'$ のとき, $9+7i+((l'+i'(k'-2)) \bmod 7)=9+7i'+((l'+i'(k'-2)) \bmod 7)$ となる $i, i'\in\{0, 1, \ldots, 6\}$ の組がただ1つ存在することを示せばよい。
  $9+7i'+((l'+i'(k'-2)) \bmod 7)$ は $i=i'$ かつ $l+i(k-2)\equiv l'+i'(k'-2) \pmod 7$ に同値である。これは更に, $i=i'$ かつ $l-l'\equiv i(k'-k) \pmod 7$ に同値である。$k'\fallingdotseq k$ より このような組 (i, i') がただ1つ存在する。

一般化

この問題は以下のように一般化できます。 解答もほぼ同じです。

p を素数, n を自然数とする。 $p(p+1)-1$ 枚のカードがあり, それぞれには n 種類のマークのうち相異なる $p+1$ 個のマークが描かれている。これらのカードからどの 2 枚を選んでも, その 2 枚のカードに共通するマークがただ 1 つある。

各 p に対してこのような状況を実現する n の最小値を求めよ[3] 。

1） 頂点と辺はそれぞれノード, エッジとも呼ばれます。
2） 考え方で書いた説明に合わせるために $C_{(k,\ l)}$ をこのように定義しましたが,
　実は $(l+i(k-2)) \bmod 7$ の部分は $(l+ik) \bmod 7$ でも構いません。
3） 答えは $p(p+1)+1$