令和５年度　京都数学オリンピック道場　問題　全９問中４問を公開

$\boxed{1}$ 正の約数を 4 個以上持つ正の整数 n の正の約数を小さい順に d_1，d_2，…… とする。$n=(d_3)^3+(d_4)^2$ を満たす n をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 5 色のペンキを用いて正 20 面体の各面を以下の条件に従って塗る。

（条件）全ての頂点についてそれぞれの頂点周りに集まる 5 つの面を相異なる 5 色で塗る。

正十二面体を回転させて同じになる塗り方を区別しないとき，塗り方は全部で何通りあるか。

$\boxed{3}$ n を 0 以上 8 以下の整数とする。n 捨 $(n+1)$ 入とは，ある桁の数が n 以下ならば切り捨て，n より大きければ切り上げるという操作のことをいう。よく耳にする四捨五入は $n=4$ の場合であり，3.1415の小数第 4 位を「四捨五入」すると，3.1415 の小数第 4 位は 5 なので，切り上げられて 3.142 となる。しかし，たとえば 3.1415 の小数第 4 位を「六捨七入」すれば小数第 4 位は切り捨てられ 3.141となる。

さて，正の整数 K に対して $\sqrt{K}$ の小数第 1 位を n 捨 $(n+1)$ 入すると 2023 となった。このような正の整数 N の個数が最も少ないような n を求めよ。ただし，このような n が複数ある場合はすべて示せ。

$\boxed{4}$ 一辺の長さが 1 の立方体の各頂点にどの方向からも糸を通すことができる器具を取り付ける。この立方体のある頂点から別の頂点まで，以下の規則に従って，一方の端のみ長さ 1 だけ赤に着色された糸をたるませることなく通すことを考える。

- 全ての頂点にちょうど 1 回ずつ糸を通す。
- 立方体の各辺か対角線，または各面の対角線に沿って糸を通す。
- 赤に着色された方の端を先頭にして糸を通す。

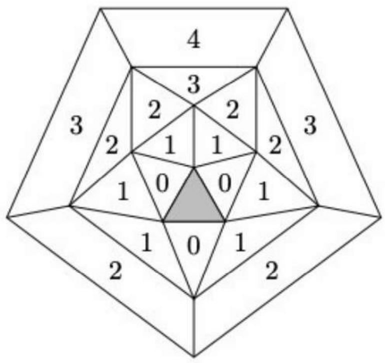
このとき，立方体の辺と対角線に沿ってはそれぞれちょうど 1 回ずつ糸が通るような糸の通し方の場合の数を求めよ。ただし，立方体の回転によって同じになる糸の通し方は同じものとして数える。

$\boxed{1}$ n が奇数であるとする。d_3，d_4 も奇数だが，等式右辺が偶数になるため不適。よって n は偶数で，$d_2=2$ である。

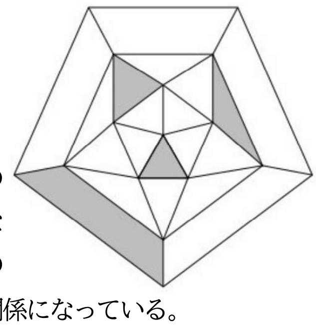
d_3 が奇数であると仮定する。d_3 は $d_2=2$ で割れない。d_2 より大きく d_3 より小さい n の約数は存在しないので，d_3 の正の約数は1，d_3 のみである。よって d_3 は素数である。n は d_3 の倍数であり，$(d_4)^2=n-(d_3)^3$ なので右辺は d_3 で割り切れる。d_3 は素数だから，d_4 も d_3 で割り切れる。$2d_3$ は d_3 より大きい n の約数なので，$d_3<d_4\leqq 2d_3$ である。よって $d_4=2d_3$ が確定するが，d_3 が奇数，$d_4=2d_3$ が偶数なので，$n=(d_3)^3+(d_4)^2$ の右辺は奇数となり，n が偶数であることに矛盾する。

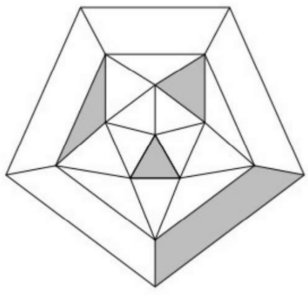
よって d_3 は偶数で，n が偶数なので条件式より d_4 も偶数である。よって $n=(d_3)^3+(d_4)^2$ の右辺は4で割れるので，$d_3=4$ が確定する。よって $n=64+(d_4)^2$ となるが，d_4 は偶数なので，整数 r によって $d_4=2r$ と書ける。r は $d_2=2<r<d_4$ を満たす n の約数であるから，$r=d_3=4$ とならねばならない。よって $d_4=8$ であり，このとき $n=128=2^7$ を得る。これは確かに条件を満たしている。以上より，求める n は　$n=128$

$\boxed{2}$ 以下の平面図において，外周を全て貼り合わせて1点にすることで正20面体を表すことができる。（ゴム風船でできた正20面体を用意して，1頂点に穴を開けて平面に広げるイメージ）基準の面を一つ決め，その面を灰色で表すことにする。また，基準面を塗る色を「基準色」ということにする。基準の面からある面まで最短で n 枚の面を跨ぐとき，その面を「距離 n の面」とする。基準面と隣り合う面は距離0であり，距離 n の面と隣り合い，かつ距離 n 以下でない全ての面に $n+1$ を当てはめていくと，以下のように基準面からの距離を定めることができる。

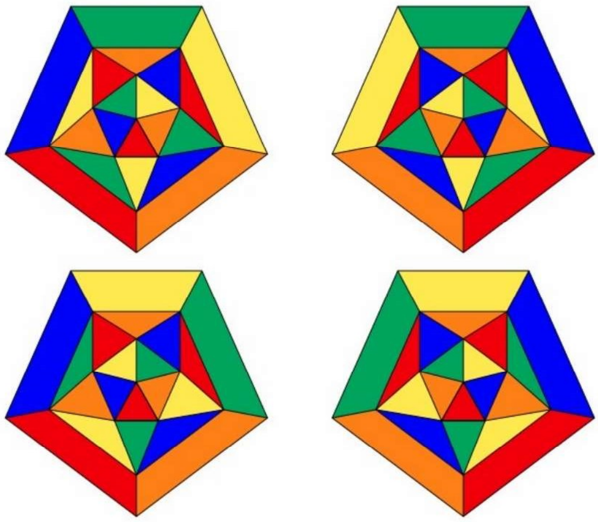


条件より基準面と辺または頂点を共有している距離0，1の面を基準色で塗ることはできない。また，距離4の面を基準色で塗ると全ての距離0，1の面と辺または頂点を共有するためこれ以上基準色で塗ることはできない。距離3の面を一つ基準色で塗ると，条件を滑たすように基準色を塗ることができる最大の面の数は3である。6つある距離2の面を条件を満たすように3つ基準色で塗ると，それ以外の面は条件を満たしながら塗ることはできない。したがって，正20面体を条件を満たすように塗ったとき，基準色の面は4つ以下である。また，これは相異なる5色全てに成り立つことであり，ある色の面が3つ以下であるとき少なくとも一つの色の面は5色以上になるので不適。よってどの色の面もちょうど4つ存在する。条件を満たすような基準色の面の選び方は回転させて同じになるものをのぞいて2通りである。なおこの2つは互いに鏡像の関係になっている。





基準面の頂点の一つを「基準点」とする 基準色の面４つの位置を固定し，基準点周りの５色の塗り方を固定すると全ての面の塗り方は１通りに決まる。基準点周りの５色の塗り方は $(5-1)!=24$ 通りだが，全ての頂点周りの色の配列を見ると，基準色から時計周りにみた色の配列は全て異なる配列であることがわかる。ただし，この平面図における外周に当たる頂点での色の配列を時計周りに見る必要があることに注意せよ。よって，正 20 面体の頂点は 12 個であるから重複したものを除いて $24 \div 12 = 2$ 通りである。以上より求める塗り方の総数は $2 \times 2=4$ 通りである。以下に４通りの塗り方の図をを示す。



$\boxed{3}$ $\sqrt{K}$ の小数第１位を n 捨 $(n+1)$ 入すると 2023 となる条件は　$2022+\dfrac{n+1}{10} \leqq \sqrt{K} < 2023+\dfrac{n+1}{10}$

したがって　$\left(2022+\dfrac{n+1}{10}\right)^2 \leqq K < \left(2023+\dfrac{n+1}{10}\right)^2$

ここで $P_n = 2023^2+404(n+1)$ とし，

さらに　$A_n=\dfrac{2}{5}(n+1)+\left(\dfrac{n+1}{10}\right)^2$，$B_n=\dfrac{3}{5}(n+1)+\left(\dfrac{n+1}{10}\right)^2$ とすると，

$2023^2+404(n+1)-P_n=4045$ であり，

$$\left(2022+\frac{n+1}{10}\right)^2=2022^2+\frac{2022}{5}(n+1)+\left(\frac{n+1}{10}\right)^2=P_n+A_n$$

$$\left(2023+\frac{n+1}{10}\right)^2=2023^2+\frac{2023}{5}(n+1)+\left(\frac{n+1}{10}\right)^2=P_n+4045+B_n$$ 　であるので，

K が満たす不等式は　$P_n+A_n \leqq K < P_n+4045+B_n$

と書ける。

この区間に含まれる K の個数が最小となる n を求めればよい。n の値により，A_n，B_n の値は右の表に示した区間に含まれる。

n	A_n	B_n
0	$0<A_n<1$	$0<B_n<1$
1		$1<B_n<2$
2	$1<A_n<2$	
3		$2<B_n<3$
4	$2<A_n<3$	$3<B_n<4$
5		
6	$3<A_n<4$	$4<B_n<5$
7		$5<B_n<6$
8	$4<A_n<5$	$6<B_n<7$

K は整数値をとるので，n の値により $P_n+A_n \leqq K < P_n+4045+B_n$ を満たす K の最大値と最小値は右の表の通りとなる。よって，条件を満たす K の個数が最小となるのは $n=0$，2 である。

n	最小値	最大値	Kの個数
0	P_n+1	P_n+4045	4045
1		P_n+4046	4046
2	P_n+2		4045
3		P_n+4047	4046
4	P_n+3	P_n+4048	4046
5			4046
6	P_n+4	P_n+4049	4046
7		P_n+4050	4047
8	P_n+5	P_n+4051	4047

$\boxed{4}$ 立方体の上面の左奥の頂点に番号「1」を振り当てて，その頂点に最も近い位置にある頂点のうち，上面にあるものの一方に番号「2」を，もう一方に番号「3」を振り当てる。さらに，上面の残りの一つの頂点に番号「4」を振り当てる。同様に，立方体の底面の頂点にも番号「5，6，7，8」を振り当てる。すなわち，底面の左奥の頂点に番号「5」を振り当てて，その頂点に最も近い位置にある頂点のうち，底面にあるものの一方に番号「6」を，もう一方に番号「7」を振り当てる。ただし，3 つの頂点「1，4，5」を通る平面に対して，頂点「2」と「6」が同じ側にあるように番号を振り当てる。さらに，上面の残りの一つの頂点に番号「8」を振り当てる。まず，立方体の回転によって同じになるものが現れず，かつ漏れがない数え上げ方を考えよう。最初に糸を通す頂点を「1」として良い，また，最後に糸を通す頂点として，「2，3，5」は全て同一視でき，「4，6，7」も全て同一視できるから，「2，4，8」の場合を考えれば十分。逆に，「1」から「2 か 4 か 8」まで糸を通すもののみを考えれば，回転して同じになるものは現れないので，以下はこれらの場合のみを考える。さて，「1」に最初に糸を通すとき，各面の対角線のみを辿って辿り着ける頂点は「1，4，6，7」であり，他の「2，3，5，8」は立方体の辺を辿る必要があるが，ある頂点から番号の和が 9 となるような頂点へは立方体の対角線で繋がっている。以上のことから，頂点のグループ A を「1，4，6，7」とし，頂点のグループ B を「2，3，5，8」とすると，数字「1」，「2」，...　，「8」を以下の規則に従って並べる順列を求めれば良いことになる。

・「1」は左端にある。
・ A に含まれる頂点に振り当てられた数字と B に含まれる頂点に振り当てられた数字がちょうど 2 か所で隣接しており，かつ隣接しているもの同士の和が 9 になる箇所とならない箇所が 1 つずつ存在する。

以下，上記の順列を求めるが，AB 間の移動がちょうど 2 回起こるということなので，A の頂点からスタートしている以上，最後に糸を通す頂点も A の頂点である。故，順列の右端は「4」である。よって，AB 間の移動がちょうど 2 回起こるのは，「1」と「4」の間に B に含まれる頂点に振り当てられた数を並べ，その B に含まれる頂点に振り当てられた数字の列の両端のいずれかに残りの A に含まれる頂点に振り当てられた数字である「6」と「7」を差し込み，隣接部分の和が 9 となる箇所がちょうど 1 か所になるように B に含まれる頂点に振り当てられた数字の列を制限すれば良い。「6」と「7」をどちらの端にどの順番に差し込むかによって 6 通りの場合分けが生じるが，いずれの場合も条件をみたすような B に含まれる頂点に振り当てられた数字の列の個数は同じなので，ここでは「6」と「7」の両方をこの順番に左端に差し込む場合を考える。

このとき，左側の隣接箇所で和が 9 となる場合，B に含まれる頂点に振り当てられた数字の列の左端が「2」の 1 通りに定まり，B に含まれる頂点に振り当てられた数字の列の右端が「5」になってはならないので，条件をみたすような B に含まれる頂点に振り当てられた数字の列の個数は $3!-2!=4$ である。次に，右側の隣接箇所で和が 9 となる場合を考えることになるが，これは左側の隣接箇所で和が 9 となる場合と同じなので，やはり $3!-2!=4$ 通りある。

よって，求める場合の数は，$4\times2\times6=48$ 通りである。