4 (1) 辺BCの中点をMとすると重心G_1，G_2は線分AM，DMをそれぞれ2:1に内分し，$G_1G_2 /\!/ AD$が成立。

ゆえに、$G_1G_2=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{2}{3}$

(2) 各頂点を中心とする球の半径$1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$をR_1，各辺の中点と各面の重心を中心とする球の半径$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$をR_2とする。

$$AB=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=2R_1+2R_2$$

ゆえに，各頂点と各辺の中点を中心とする球同士は接していることがわかる。

$$G_1M=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}=2R_2$$

ゆえに，各辺の中点と各面の重心を中心とする球同士は接していることがわかる。

(1)の結果と，$AG_1=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$を利用すると

$$G_1G_2=\frac{2}{3}>2\times\frac{\sqrt{3}}{6}=2R_2$$

ゆえに，各面の重心を中心とする球同士が接することはない。

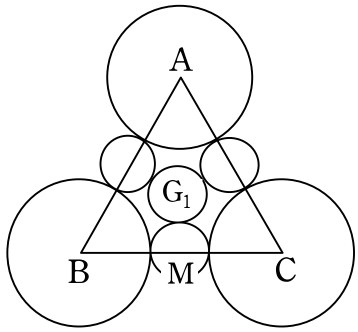
$$AG_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=R_1+R_2$$

$$AG_2>|AM-MG_2|=|AM-MG_1|=AG_1>R_1+R_2$$

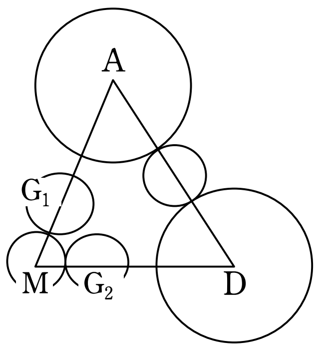
ゆえに，各頂点と各面の重心を中心とする球同士が接することはない。

以上の結果から，14個の球の位置関係は次のように考えることができる。

【参考】 平面ABCで切った断面図

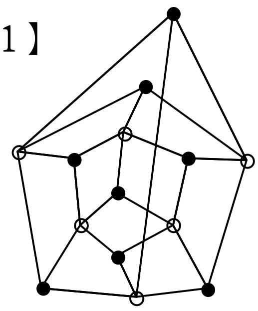


平面AMDで切った断面図

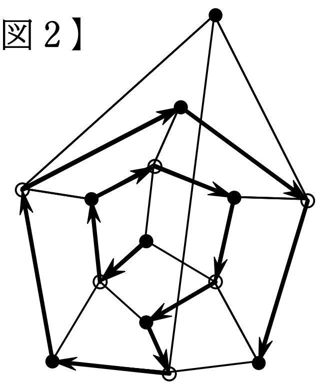


14個の球の中心を「点」とし，接する球の中心を結んだ線分を「辺」とするグラフ（図1）を考える。
条件を満たす経路は，下図の辺で結ばれた点を移動する経路のうち，同じ点を2度通らないものを考えれば良い。
図1において，黒色の「点●」を「黒グループ」，白色の「点○」を「白グループ」とする。
このとき，辺で結ばれた2点は異なるグループに属することがわかる。
条件を満たし，全14個の点を移動する経路が存在すると仮定すると，
「黒グループ」の「点●」と「白グループ」の「点○」を交互に移動することから，
「点●」が7個と「点○」が7個を移動する経路が存在することになるが，「点○」は6個しかない。
ゆえに，全14個の点を移動する経路は存在せず，求める球の個数が13個以下であることがわかる。
このとき，13個の点を移動する経路として，図2が存在する。
ゆえに，最大13個の球の内部を通ることができる。

【図1】



【図2】



5　自然数 S の一の位を $k(S)$ で表すこととする。

$P=10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$　とすると　$Q=10^4e+10^3d+10^2c+10b+a$ であり，

条件より自然数 n を用いて　$P=nQ$　と表せるので

$10^4a+10^3b+10^2c+10d+e=n(10^4e+10^3d+10^2c+10b+a)$

ただし，$1\leqq a\leqq 9$, $0\leqq b\leqq 9$, $0\leqq c\leqq 9$, $0\leqq d\leqq 9$, $1\leqq e\leqq 9$, $2\leqq n\leqq 9$ である。

最高位の数について，繰り上がりを考慮すると　$ne\leqq a$　よって　$ne\leqq 9$　…… ①

$2\leqq n\leqq 9$　より　$e=1,2,3,4$　である。また　$k(na)=e$　…… ②　である。

まず，a , e , n について考える。

(i)　$e=4$ のとき

　①より $n=2$ なので $a\geqq ne=8$ より　$a=8,9$ となるが②に不適

(ii)　$e=3$ のとき　①より　$n=2,3$

　$n=2$ のとき　$a\geqq ne=6$ より　$a=6,7,8,9$ となるが②に不適

　$n=3$ のとき　$a\geqq ne=9$ より　$a=9$ となるが②に不適

(iii)　$e=2$ のとき　①より $n=2,3,4$

　$n=2$ のとき　$a\geqq ne=4$ より　$a=4,5,6,7,8,9$ となり，②より $a=6$

　$n=3$ のとき　$a\geqq ne=6$ より　$a=6,7,8,9$ となるが②に不適

　$n=4$ のとき　$a\geqq ne=8$ より　$a=8,9$ となり，②より $a=8$

(iv)　$e=1$ のとき　$1\leqq a\leqq 9$, $2\leqq n\leqq 9$ なので②より $na=21,81$

　$na=21$ のとき　その組合せは $(n,a)=(3,7),(7,3)$ となるが $a\geqq ne$ より $(n,a)=(3,7)$

　$na=81$ のとき　その組合せは $(n,a)=(9,9)$ となり，これは $a\geqq ne$ を満たす。

したがって (i)～(iv) より　$(a,e,n)=(6,2,2),(8,2,4),(7,1,3),(9,1,9)$

$(a,e,n)=(6,2,2)$ のとき　$b\leqq 9$, $c\leqq 9$, $d\leqq 9$ より

　$nQ=2(2\cdot 10^4+10^3d+10^2c+10b+6)=4\cdot 10^4+2\cdot 10^3d+2\cdot 10^2c+20b+12\leqq 59992$

ここで　$P=6\cdot 10^4+10^3b+10^2c+10d+2$ より $P\neq nQ$ なのでこれは不適

$(a,e,n)=(8,2,4)$ のとき

　$nQ=4(2\cdot 10^4+10^3d+10^2c+10b+8)=8\cdot 10^4+4\cdot 10^3d+4\cdot 10^2c+40b+32$

よって，十の位に注目すると $P=8\cdot 10^4+10^3b+10^2c+10d+2$ より　$k(4b+3)=d$ なので d は奇数である。

したがって，千の位に注目すると，繰り上がりができないことから $d=1$　であり，またそのとき $4\leqq b$ なので

これらを満たす b , d の組は $(b,d)=(7,1)$　よって　$P=nQ$ より $c=9$

$(a,e,n)=(7,1,3)$ のとき　$b\leqq 9$, $c\leqq 9$, $d\leqq 9$ より

　$nQ=3(10^4+10^3d+10^2c+10b+7)=3\cdot 10^4+3\cdot 10^3d+3\cdot 10^2c+30b+21\leqq 59991$

ここで　$P=7\cdot 10^4+10^3b+10^2c+10d+1$ より　$P\neq nQ$ なのでこれは不適

$(a,e,n)=(9,1,9)$ のとき

　$nQ=9(10^4+10^3d+10^2c+10b+9)=9\cdot 10^4+9\cdot 10^3d+9\cdot 10^2c+90b+81$

よって，十の位に注目すると $P=9\cdot 10^4+10^3b+10^2c+10d+1$ より　$k(9b+8)=d$

千の位に注目すると，繰り上がりができないことから $d=0,1$

これらを満たす b , d の組は $(b,d)=(8,0),(7,1)$ となるが，$(b,d)=(7,1)$ のとき　$c=-\dfrac{27}{8}$ より不適

$(b,d)=(8,0)$ のとき　$P=nQ$ より　$c=9$

以上より，$P=87912,98901$

6　$n=6$ のときは，図１のように配置すると正方形の一辺が最小になる。
このとき，互いに接している円の中心を線分でむすび
さらに正方形の辺に接する円とその接点を線分でむすぶと図２のようになる。
外側の正方形より一辺の長さが２だけ小さい正方形を考えると（図３），
この正方形の周上には５つの円の中心がある。
図３のように点Ａ，Ｂ，Ｃをとり，図４の部分だけ取り出して
考えると，$\mathrm{BC}=\dfrac{2}{3}\mathrm{AC}$　かつ　$\mathrm{AB}=4$ であり，
さらに　$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2$　であるから　$\mathrm{AC}=\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$
以上から，求める正方形の一辺の長さは $2+\dfrac{12\sqrt{13}}{13}$

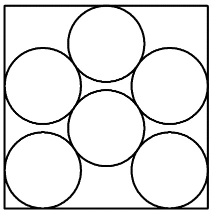


図１

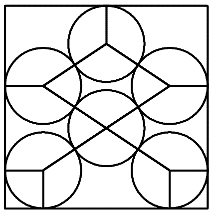


図２

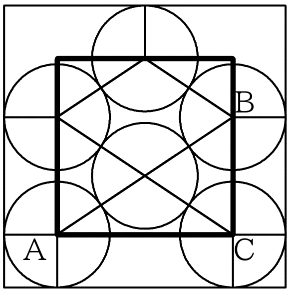


図３

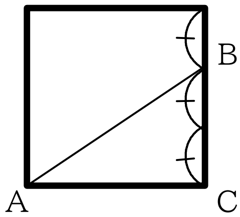


図４

$n=7$ のときは、図５のように配置すると正方形の一辺が最小になる。
このときの一辺の長さは，$n=6$ のときと同様にして $4+\sqrt{3}$ となる。

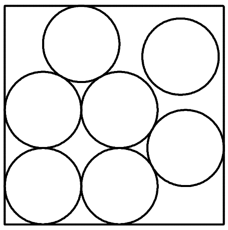


図５

$\boxed{7}$ (1) $12.34_{(8)}=1\cdot 8^1+2\cdot 8^0+3\cdot\dfrac{1}{8}+4\cdot\dfrac{1}{8^2}=8+2+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{64}=\dfrac{167}{16}=10.4375$

(2) $12.12_{(2.5)}=1\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^1+2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^0+1\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{5}{2}\right)}+2\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=5.22$

(3) $x=1.1111\cdots_{(2.6)}$ …① とおくと，

$2.6x=11.1111\cdots_{(2.6)}$ …②

②−①より

$1.6x=10_{(2.6)}=2.6$

$\therefore\quad x=\dfrac{2.6}{1.6}=\dfrac{13}{8}=1.625$

（無限級数を用いた場合）

$$1.1111\cdots_{(2.6)}=1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^0+1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^{-1}+1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^{-2}+1\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^{-3}+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{5}{13}}=\frac{13}{8}=1.625$$

(4) $3_{(10)}=a_{-1}a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)}$ となるように，各桁の数字 $a_{-1}, a_0, a_1, \cdots$ を決定していく。

[手順1] $1\times 2.5<3<2\times 2.5$ なので，$a_{-1}=1$ とできる。

すると $a_0.a_1a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)}=3-2.5=0.5$

[手順2] $0<0.5<1$ なので，$a_0=0$ とできる。

すると $0.a_1a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)}=0.5-0=0.5$

[手順3] $1\times\dfrac{1}{2.5}<0.5<2\times\dfrac{1}{2.5}$ なので，$a_1=1$ とできる。

すると $0.0a_2a_3a_4\cdots_{(2.5)}=0.5-\dfrac{1}{2.5}=0.1$

[手順4] $0\times\dfrac{1}{2.5^2}<0.1<1\times\dfrac{1}{2.5^2}$ なので，$a_2=0$ とできる。

すると $0.00a_3a_4\cdots_{(2.5)}=0.1-0=0.1$

[手順5] $1\times\dfrac{1}{2.5^3}<0.1<2\times\dfrac{1}{2.5^3}$ なので，$a_3=1$ とできる。

すると $0.000a_4\cdots_{(2.5)}=0.1-\dfrac{1}{2.5^3}=0.036$

同様に，小数第4位，5位，… を，考えられる最大の数とすることによって

$3_{(10)}=10.1011100001101210\cdots_{(2.5)}$ を得る。

また，常に考えられる最大の数をとらなくても，

例えば $a_1=0$ とすれば $3_{(10)}=10.0222000101020202\cdots_{(2.5)}$ のような表示も考えられる。

$3_{(10)}$ をこの記数法で表す方法は，無数に存在する。

(5) この問題は解答を掲載しません。