京都マス・フェス 2022　１st ステージ

令和４年度

京都・大阪マス・インターセクション

注　意　事　項

１．問題は１ページから６ページまであります。

２．７ページの解答用紙は必要に応じて使用してください。

３．個人で考えた解答を募集します。１問ごとの提出とし，複数の問題に応募することが可能です。詳しい提出方法は，京都府教育委員会高校教育課のホームページをご覧ください。

４．提出された解答の中から優秀な解答を選考し、優秀者を表彰します。また，解法のアイデアを評価する「アイデア賞」もあります。

５．解答について

(1) 送られてきた解答は，解説会で紹介させていただく場合があります。

(2) 考え方と解答を７ページの解答用紙を使用し，１問につき１枚以上で記入してください。解答が２枚以上になるときや複数の問題に応募するときは，解答用紙を必要枚数印刷してください。

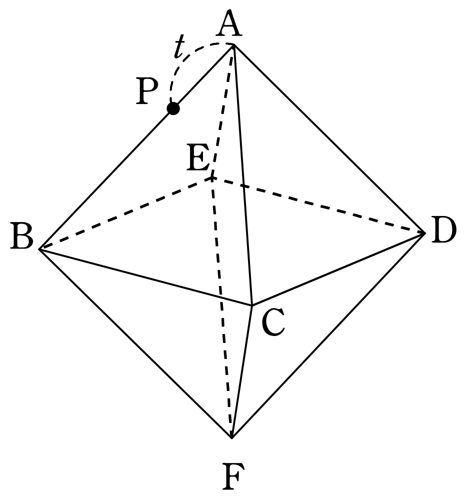
(3) 必ず考え方を書いてください。特に，正解までたどり着かないものや間違えているものでも，アイデア賞の選考対象とします。

(4) 引用・参考にしたものがあれば，その出典を明記してください。

$\boxed{1}$

図のような１辺の長さが１の正八面体において，辺 AB 上に AP= t （ $0<t<1$ ）を満たす点 P をとる。

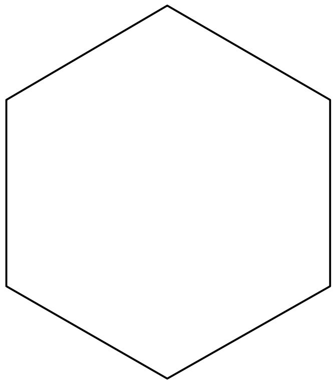
点 P を通り，面 ADE に平行な平面が正八面体から切り取る断面の面積を求めよ。



$\boxed{2}$

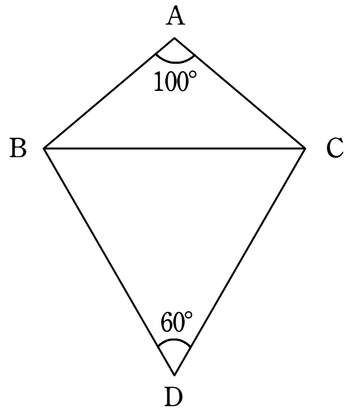
１辺の長さが１の正六角形の内部または辺上に 19 個の点を取る。

このとき，ある２点の距離は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 以下であることを示せ。



$\boxed{3}$

　$\angle \mathrm{BAC}=100^\circ$ である二等辺三角形 ABC と正三角形 DBC が，図のように辺 BC を共有している。
　辺 AC を C の方向に延長させ，その延長線上に，$\mathrm{BC}=\mathrm{AE}$ となる点 E をとるとき，$\angle \mathrm{CDE}$ の大きさを求めよ。



$\boxed{4}$

　n は 2 桁の自然数とする。 10^n-n の各位の数の和が 50 の倍数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{5}$

　n を自然数とする。n の正の約数の平均値が整数であるとき， n を「よい数」と呼ぶことにする。
　次の各問いに答えよ。

(1)　n が 3 以上の素数であるとき， n はよい数であることを証明せよ。

(2)　$n=pq$ （ p, q は 3 以上の素数，$p \neq q$ ）と表されるとき， n はよい数であることを証明せよ。

(3)　$n=p^2$ （ p は素数）と表されるとき， $5n$ はよい数であることを証明せよ。

(4)　$n=p^3$ （ p は素数）と表されるとき， $n, 2n, 3n, \cdots$ のうち少なくとも1つはよい数であることを証明せよ。

(5)　その他，よい数について成り立つ性質を自由に調べよ。

$\boxed{6}$

次の文章を読み，各問いに答えよ。

1.　順列の集合 P_n

n を正の整数とする。1 から n までのすべての数を 1 つずつ並べる順列全体の集合を P_n とする。

例 1　$n=3$ のとき

$$P_3=\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

である。

2.　ヤング図形

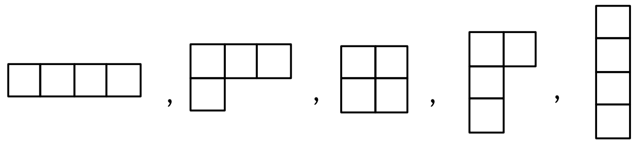
n を正の整数とする。次を満たすように n 個の正方形を，左端をそろえて，

(上から k 段目の正方形の個数)$\geqq$(上から $k+1$段目の正方形の個数)

となるように並べた図形を考える。

このような図形をヤング図形と呼び，Y_n を n 個の正方形を並べたヤング図形全体の集合とする。

例 2　$n=4$ のとき

$Y_4=\{$  $\}$

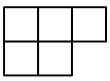
である。

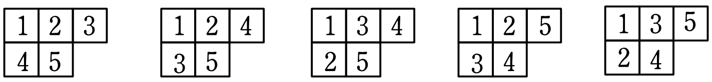
3.　盤

n を正の整数とし，$d \in Y_n$ とする。異なる n 個の整数を，ヤング図形 d の正方形の中に 1 つずつ書き込むことを考える。このとき，次の規則 A を満たすように書き込んだものを d を枠とする盤と呼ぶ。

規則 A

[1]　上から数えて同じ段の正方形の中に書かれている数は，右にある方が大きい。
[2]　左から数えて同じ列の正方形の中に書かれている数は，下にある方が大きい。

例 3　1 から 5 の数を 1 つずつ書き込んだ  $\in Y_5$ を枠とする盤は



の 5 個である。

> 問題
>
> (1)　Y_5 の要素であるヤング図形をすべて書き並べよ。
>
> (2)　1 から 5 の数を 1 つずつ書き込んだ Y_5 の要素のヤング図形を枠とする盤の個数を求めよ。

4.　バンプ

n を正の整数，$d \in Y_n$ とし，d を枠とする盤 t を考える。ここで，m を盤 t に書き込まれているどの整数とも異なる整数とする。このとき，盤 t に $\boxed{m}$ を付け加える操作を以下のように定め，バンプと呼ぶ。

まず，m_1 を m，t_1 を t と定め，次の step (i) を $i=1,2,3\cdots$ に対して操作が終了するまで順次 m_2，m_3，…，m_i，… と t_2，t_3，…，t_i，…を定めながら行う。

> step (i)　[1]　盤 t_i の上から i 段目に書かれている整数がすべて m_i 以下であるとき，上から i 段目の右端に $\boxed{m_i}$ を付け加えたものを t_{i+1} とし，操作を終了する。
>
> [2]　盤 t_i の上から i 段目に正方形がないとき，上から i 段目に $\boxed{m_i}$ を上段の左端とそろうように付け加えたものを t_{i+1} とし，操作を終了する。
>
> [3]　[1]，[2] 以外の場合，上から i 段目に書かれている整数のうち，m_i より大きいもののうち最小の整数 l を m_i に書き換えた盤を t_{i+1}，l を m_{i+1} とする。

操作が step (i) で終了したとき，$(t \leftarrow m) = t_{i+1}$ で定め，バンプ後の盤と呼ぶことにする。また，バンプにより盤 $(t \leftarrow m)$ を生成することを，盤 t に対して，m をバンプするという。

例 4　$t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$　に対して，3 をバンプすると

step (1)　$m_1 = 3$

$t_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \leftarrow 3$

4 を 3 に書き換え

$m_2 = 4$

⇒

step (2)　$m_2 = 4$

$t_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ ← 4（2 段目）

6 を 4 に書き換え

$m_3 = 6$

⇒

step (3)　$m_3 = 6$

$t_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$ ← 6（3 段目）

上から3 段目の右端に

$\boxed{6}$ を付け加える.

⇒　$t_4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$　よって，バンプ後の盤 $(t \leftarrow 3)$ は　$(t \leftarrow 3) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$　である。

問題

(3) $t=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&6\\ \hline 3&5\\ \cline{1-2} 7\\ \cline{1-1}\end{array}$ に対して，1 をバンプしたときのバンプ後の盤 $(t\leftarrow 1)$ を求めよ。

5. 順列と盤の関係

n を正の整数とする。順列 $p_1p_2\cdots p_n\in P_n$ に対して，以下の手順で 2 つの盤を生成する。

盤 $\boxed{p_1}$ に対して，$p_2,\cdots,p_n$ をこの順に次々とバンプし，

$$\Bigl(\Bigl(\Bigl(\Bigl(\boxed{p_1}\leftarrow p_2\Bigr)\leftarrow p_3\cdots\Bigr)\cdots\leftarrow p_{n-1}\Bigr)\leftarrow p_n\Bigr)\ \cdots ①$$

という盤を生成する。① とは別に盤 $\boxed{1}$ に対して，① を生成する過程で，整数 p_k をバンプした結果，バンプ後の盤として新たに正方形が付け加えられた場所に $\boxed{k}$ を付け加えていくという記録用の盤を作る。

例 5　23154 $\in P_5$　に対して

$\boxed{2}\quad\boxed{1}\quad\Rightarrow$ バンプ後 $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\ \hline\end{array}$ 記録用 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array}$ $\Rightarrow$ バンプ後 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}$ 記録用 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}$

$\Rightarrow$ バンプ後 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}$ 記録用 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}$ $\Rightarrow$ バンプ後 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}$ 記録用 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&5\\ \cline{1-2}\end{array}$

例 5 のように，バンプ後の盤と，どのように正方形が増えていったかを記録した記録用の盤のペアができる。

$p\in P_n$ に対して，このペアを $(B(p),R(p))$ で表すことにする.

例 5 では

$$B(23154)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}\qquad R(23154)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&5\\ \cline{1-2}\end{array}$$

である。

問題

(4)　$p \in P_5$ とする。このとき $B(p)$, $R(p)$ が次のようになる順列 p を求めよ。

$$B(p)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \cline{1-2}\end{array}\qquad R(p)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

以上のことから，次の事実が成り立つことがわかる。

事実

任意の $p \in P_n$ に対して，$B(p)$，$R(p)$ の枠は 同じ形のヤング図形となり， $B(p)$，$R(p)$ は，どちらも 1 から n を規則 A を満たすように書き並べた盤になる。

6. 順列の増大部分列と減少部分列

n を正の整数とする。順列 $p_1 p_2 \cdots p_n \in P_n$ において，増大部分列と減少部分列を以下のように定める。

$p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_k}$ かつ　$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$　を満たす　$p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$　を長さ k の増大部分列

$p_{i_1} > p_{i_2} > \cdots > p_{i_k}$ かつ　$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$　を満たす　$p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$　を長さ k の減少部分列

という。

例 6

$134625 \in P_6$ において

36 は長さ 2 の増大部分列，1345 は長さ 4 の増大部分列，6 は長さ 1 の増大部分列，

32 は長さ 2 の減少部分列，62 は長さ 2 の減少部分列，6 は長さ 1 の減少部分列

である。

問題

(5)　n , m は $1 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。P_n の要素のうち，増大部分列の長さの最大値が m かつ，減少部分列の長さの最大値が $n-m+1$ であるものの総数を求めよ。

令和４年度京都・大阪マス・インターセクション解答用紙

お名前		フリガナ		学校名		学年	

問題番号（　　　　）　　　考え方と解答を１問につき１枚以上で記入してください。

※どちらかに○を付けてください。

（　つづく　・　終わり　）