令和４年度　京都数学オリンピック道場　問題　全８問中３問を公開

$\boxed{1}$　円周上に異なる 2022 個の点が置かれている。正の整数 N に対し，以下の操作を考える。

まず異なる 2 点の組を N 組選び、選んだ 2 点の組を端点とする N 本の線分を引く(ある 1 点が 2 本以上の線分の端点となってもよい)。その後，2022 個の各点について赤，緑，青の 3 色から 1 色を選んで塗る。 N 本の線分全てについて，両端点が異なる色で塗られているとき，この色の塗り方を「良い塗り方」であると定義する。

N 本の線分をどのように引いても「良い塗り方」が存在しないような最小の N を求めよ。

$\boxed{2}$　△ABCの外接円Oの弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ のうちＡを含まない方について、その中点をＡ’とする。同様にB’，C’を定める。

このとき△ABCの内心と△A’B’C’の垂心は一致することを示せ。

$\boxed{3}$　鋭角三角形ABCについて，「各辺の中点」３つと，「各頂点から対辺に下ろした垂線と対辺との交点」3 つと，「垂心Hと各頂点を結んだ線分の中点」３つの合計 9 つの点（重複する場合を含む）は同一円周上にあることを示せ。

令和４年度　京都数学オリンピック道場　解答

$\boxed{1}$ 問題は以下のように言い換えられる。

> 2022 個の各点について赤，緑，青の 3 色から 1 色を選んで塗った後，「異なる色で塗った点の組」全てに線分を引く。どのような塗り方をしても N 本以上の線分を引くことができないような最小の N を求めよ。

赤，緑，青で塗った点の個数を a , b , c とすると，同じ色の点の組には線分を引くことができないため，線分の本数は

$$\frac{2022\cdot 2021}{2!}-\left\{\frac{a(a-1)}{2!}+\frac{b(b-1)}{2!}+\frac{c(c-1)}{2!}\right\}$$

と表される。

したがって，「 $a+b+c=2022$ の条件下でのこの式の値の最大値」に 1 を加えたものが N である。

$f(a,b,c)=\dfrac{a(a-1)}{2!}+\dfrac{b(b-1)}{2!}+\dfrac{c(c-1)}{2!}$ を最小化することを考える。…… (*)

以下， $a\leqq b\leqq c$ と仮定して，c を固定し， a , b を変化させると，

$$f(a+1,b-1,c)=\left\{\frac{a(a+1)}{2!}+\frac{(b-1)(b-2)}{2!}+\frac{c(c-1)}{2!}\right\}$$

$$f(a+1,b-1,c)-f(a,b,c)=a-(b-1)$$

したがって　$a<b-1$ であるとき， $f(a+1,b-1,c)<f(a,b,c)$ であることから，

$a=b$ または $a=b-1$ であることが， $f(a,b,c)$ が最小値をとる必要条件となる。

a と c ， b と c の関係も同様に示すことができ， $f(a,b,c)$ が最小値をとる必要条件は

($a=b$ または $a=b-1$) かつ ($a=c$ または $a=c-1$) かつ ($b=c$ または $b=c-1$)

となる。 $a+b+c=2022$ の条件下でこれを満たす (a,b,c) の値は

$$a=b=c=\frac{2022}{3}=674$$

であり，このとき引ける線分の本数は

$$\frac{2022\cdot 2021}{2!}-3\cdot\frac{674\cdot 673}{2!}=1362828$$

したがって， $N=1362828+1=1362829$

【別解】

(*) について， $a+b+c=2022$ を用いて変数 c を消去し，2 変数の 2 次関数として整理すると，

$$\begin{aligned}f(a,b,2022-a-b)&=\frac{1}{2}\{a(a-1)+b(b-1)+(2022-a-b)(2021-a-b)\}\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2ab-4044a+2b^2-4044b+4086462)\\&=a^2+ab-2022a+b^2-2022b+2043231\end{aligned}$$

$$=\left(a+\frac{b-2022}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{4044}{4}b+\frac{4084440}{4}$$

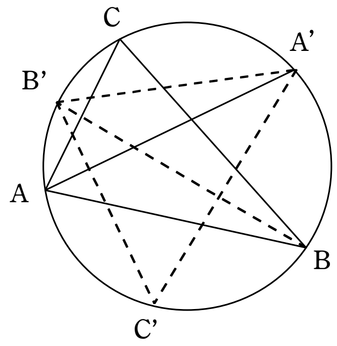
$$=\left(a+\frac{b-2022}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-674)^2+680403$$

したがって， $f(a,b,c)$ は $a=b=c=674$ で，最小値 680403 をとる。

このとき，引ける線分の本数は $\dfrac{2022\cdot 2021}{2!}-680403=1362828$

したがって， $N=1362828+1=1362829$

$\boxed{2}$ ∠BACの二等分線と，点A’からB’C’に引いた垂線が一致することを示せば，
対称性から△ABCの内心と△A’B’C’の垂心が一致することを証明できる。



円周角の定理から $\overset{\frown}{\mathrm{CA'}}=\overset{\frown}{\mathrm{A'B}}$ であるから　∠CAA’＝∠A’AB
よって　∠BACの二等分線は直線AA’と一致する。

さらに　直線AA’と辺B’C’の交点を H とすると △A’B’Hについて

∠A’HB’＝180°－∠A’B’B－∠BB’C’－∠AA’B’

＝180°－∠A’AB－∠BCC’－∠ABB’

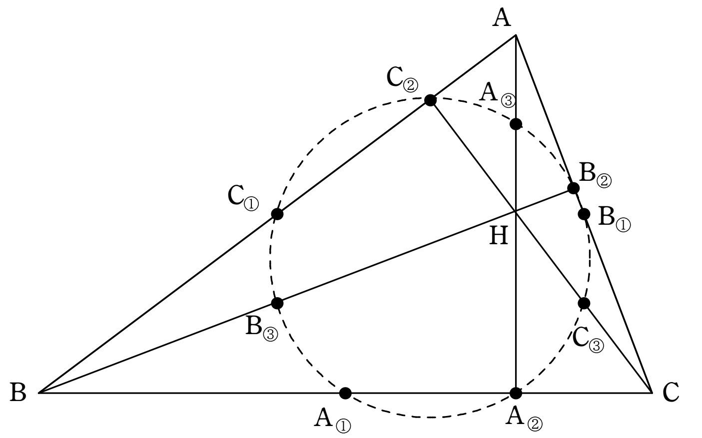
＝180°－$\frac{1}{2}$ ∠CAB－$\frac{1}{2}$ ∠BCA－$\frac{1}{2}$ ∠ABC

＝90°

よって　AA’⊥B’C’であるから，点A’からB’C’に引いた垂線は直線AA’と一致する。

以上から∠BACの二等分線と，点A’からB’C’に引いた垂線は一致するので，示したいことが言えた。

3



Aの対辺の中点を $A_{①}$，Aから対辺に引いた垂線と対辺の交点を $A_{②}$，AHの中点を $A_{③}$ とする。
ほかの点にも同様に $B_{①}$ から $C_{③}$ までの名前を付ける。
△ABCについて，$C_{①}B_{①}$ は辺AB，ACの中点を結んだ線分なので中点連結定理より $C_{①}B_{①} \parallel BC$
△HBCについて，$B_{③}C_{③}$ は辺HB，HCの中点を結んだ線分なので中点連結定理より $B_{③}C_{③} \parallel BC$
よって　$C_{①}B_{①} \parallel B_{③}C_{③}$　…… (*)
さらに△BAHについて，$C_{①}B_{③}$ は辺BA，BHの中点を結んだ線分なので
中点連結定理より $C_{①}B_{③} \parallel AH$
△CAHについて，$B_{①}C_{③}$ は辺CA，CHの中点を結んだ線分なので
中点連結定理より $B_{①}C_{③} \parallel AH$
よって　$C_{①}B_{③} \parallel B_{①}C_{③}$　…… (**)
式 (*) , (**) から四角形 $C_{①}B_{①}C_{③}B_{③}$ は平行四辺形であり，さらに $AH \perp BC$ から長方形である。
したがって $B_{①}, C_{①}, B_{③}, C_{③}$ は同一円周上にある。この円を α とすると，
線分 $B_{①}B_{③}$ と $C_{①}C_{③}$ は円 α の直径である。

$\angle B_{①}B_{②}B_{③} = 90^\circ$ であり，$B_{①}B_{③}$ は円 α の直径であるから，点 $B_{②}$ は円 α 上にある。
同じく $\angle C_{①}C_{②}C_{③} = 90^\circ$ であり，$C_{①}C_{③}$ は円 α の直径であるから，点 $C_{②}$ は円 α 上にある。

以上から $B_{①}, B_{②}, B_{③}, C_{①}, C_{②}, C_{③}$ は同一円周上にある。
同様にして $A_{①}, A_{②}, A_{③}, C_{①}, C_{②}, C_{③}$ も同一円周上にある。
この円はどちらも△ $C_{①}C_{②}C_{③}$ の外接円であるから等しい円であり，示したいことが言えた。

補足　この円を９点円という。９点円は，△ABCが鋭角三角形でない場合でも存在する。