

1 【1998 British Mathematical Olympiad 改題】

4000 人が 200 組に分かれる。このとき、次の【条件】を満たす自然数 n の最小値を求めよ。

【条件】 同じ人数の組が n 個までしか出来ないように分かれることができる。

2 【Putnam Competition 2018】

$n < 10^{100}$ を満たす正の整数のうち、以下の条件を同時に満たすものをすべて答えよ。

- n は 2^n を割り切る。
- $n-1$ は 2^n-1 を割り切る。
- $n-2$ は 2^n-2 を割り切る。

3 次の3つの条件を満たす自然数 n を考える。

- (A) 10桁である。
- (B) 各桁の数の和が31である。
- (C) 右の位の数は、左の位の数以上である。

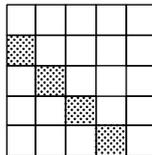
たとえば $n = 1112333458$ は条件を満たす。

自然数 n が条件 (A) (B) (C) を満たすとき、 $9n$ の各桁の数の和としてありえる最大の値を求めよ。

4 [著作権の関係上記載できません。]

5 【1998 British Mathematical Olympiad 改題】

1辺の長さ5の正方形を、1辺の長さ1の正方形25個に分割する。各正方形に1, 2, 3, 4, 5の5種類の数のうち1つを選んで書き込む。その際、各行、各列、2本の対角線、のすべてにおいて、1, 2, 3, 4, 5が1個ずつ現れるように書き込む。右の図で色の塗られた4つのマスに書かれた数の合計を「スコア」と呼ぶとき、スコアの最大値を求めよ。



6 【2012/13 British Mathematical Olympiad】

8マス×8マスのチェス盤のマスにいくつかの石を置く。64個のマスそれぞれについて、各マスに置ける石は1つまでとする。さらに、同じ行、同じ列、同じ対角線に5つ以上の石が置かれていないようにするとき、チェス盤上に置ける石の数は最大でいくつか。理由とともに答えよ。ただし、「対角線」は長さ8マスの2本の対角線を指す。

7 【Online Math Contest OMC048(B)】

集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 105\}$ の部分集合で、次の条件を満たすものを良い集合と呼ぶことにする。

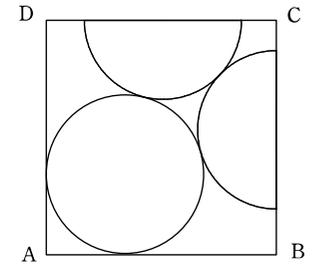
- A の要素の個数は2以上である。
- どの相異なる2つの要素に対しても、和が105と互いに素である。

良い集合の要素の数の最大値を N とするとき、要素の個数が N となる良い集合はいくつあるかを答えよ。

8 【IMC2010】

正方形 $ABCD$ の中で、半径1の円と、半径1の2個の半円が図のように接している。

正方形 $ABCD$ の面積を求めよ。



9 x, y が自然数で, $x^2 + y$ と $y^2 + x$ が平方数になることはあるか

10 $x^3y + x + y = xy + 2xy^2$ を満たす非負整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

11 【日本数学オリンピック予選2000】

$$\sum_{k=1}^{100} \left(\left\lceil \frac{k^2}{100} \right\rceil + [10\sqrt{k}] \right) \text{を求めよ。}$$

ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数である。

12 半径の長さが5, 7, 30である円 O_1 , O_2 , O_3 が互いに外接している。このとき、その外側から円 O_1 , O_2 , O_3 に接する円 O の半径を求めよ。

