7 【Online Math Contest OMC048 (B)】

集合 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 105\}$ の部分集合で, 次の条件を満たすものを良い集合と呼ぶことにする。

- A の要素の個数は 2 以上である。
- どの相異なる 2 つの要素に対しても, 和が 105 と互いに素である。

良い集合の要素の数の最大値を N とするとき, 要素の個数が N となる良い集合はいくつあるかを答えよ。

解答

$T=\{0, 1, 2\}\times\{0, 1, 2, 3, 4\}\times\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とおく。

$105=3\times5\times7$ なので, 中国式剰余定理より S の要素と T の要素は 1 : 1 に対応し

T の相異なる 2 つの要素 (x, y, z), (x', y', z') の和 $(x+x', y+y', z+z')$ が

$$x+x'\in3\mathbb{Z} \quad \text{または} \quad y+y'\in5\mathbb{Z} \quad \text{または} \quad z+z'\in7\mathbb{Z}$$

とならないように, T の要素を選んでいく。

$xyz\fallingdotseq0$ のとき

$$x \text{ と } 3-x \quad \text{または} \quad y \text{ と } 5-y \quad \text{または} \quad z \text{ と } 7-z$$

を成分にもつ T の要素は, 同時に選んではいけない。

また, T の部分集合の要素の個数は最大となるように考えると $(0, 0, 0)$ や $(x, 0, 0)$ などは選んではいけないので

$(0, x, y)$, $(x, 0, z)$, $(x, y, 0)$ のようなものを選ぶ必要がある。

以上を踏まえると最大値 N は

$$N=1\times2\times3+3=9$$

で, このときの T の要素の選び方の総数は

$$2^1\times2^2\times2^3\times(2\times3)\times(1\times3)\times(1\times2)=2304$$

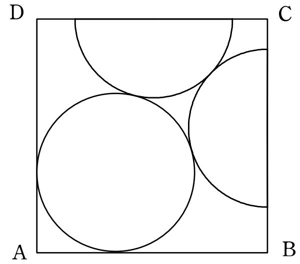
である。

令和３年度　京都数学オリンピック道場　問題・略解

8 【IMC 2010】

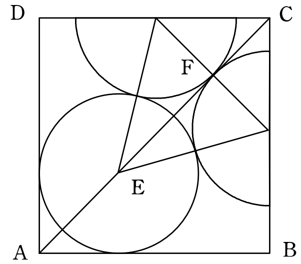
正方形 ABCD の中で，半径 1 の円と，半径 1 の 2 個の半円が図のように接している。

正方形 ABCD の面積を求めよ。



解答

円の中心を E とし，2 つの半円の中心を結ぶ直線と AC の交点を F とする。



$\mathrm{AE}=\sqrt{2}$，$\mathrm{FE}=\sqrt{3}$，$\mathrm{FC}=1$

正方形 ABCD の対角線の長さが $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ なので,

正方形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

9 x，y が自然数で，x^2+y と y^2+x が平方数になることはあるか

解答

$x \geqq y$ と仮定．ここで

$x^2 < x^2+y \leqq x^2+x < x^2+2x+1=(x+1)^2$

よって，x^2+y は平方数にならない．

y^2+x も同様．

10 $x^3y+x+y=xy+2xy^2$ を満たす非負整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答

$x=0$ の場合，$y=0$　　$y=0$ の場合，$x=0$

よって $(x,\ y)=(0,\ 0)$

$x=1$ の場合，$y+1+y=y+2y^2$

これを解くと，$2y^2-y-1=0 \Leftrightarrow (2y+1)(y-1)=0 \Leftrightarrow \quad y=1$

$y=1$ の場合，$x^3+x+1=x+2x$

これを解くと，$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$

よって $(x,\ y)=(1,\ 1)$

以下，$x \geqq 2$，$y \geqq 2$ の場合を考える。$(x-1)(y-1) \geqq 1$ なので $xy \geqq x+y$

与式を変形すると

$xy+2xy^2-x^3y=x+y$

よって

$xy(1+2y-x^2)=x+y \geqq 4$　…　①

ここで，$xy \geqq x+y$ なので　①より $0< 1+2y-x^2 \leqq 1$ を得る．

$1+2y-x^2$ は整数より，$1+2y-x^2=1$

よって①より $xy=x+y$ となるので，

$(x-1)(y-1)=1$

$x \geqq 2$，$y \geqq 2$ で $(x-1)(y-1)=1$ を満たすのは $(x,\ y)=(2,\ 2)$

以上より求めるすべての整数解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$

11 【日本数学オリンピック予選2000】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left(\left[\frac{k^2}{100}\right]+[10\sqrt{k}\,]\right)$ を求めよ。

ただし、$[x]$ は x を超えない最大の整数である。

解答

$f(x)=\dfrac{x^2}{100}$ とする。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k^2}{100}\right]$ の値は $y=f(x)$ のグラフ、x 軸、直線 $x=100$ で囲まれた領域内（x 軸上の格子点は含まず、$y=f(x)$ と $x=100$ 上の格子点は含む。）の格子点の個数に等しい。

また、$g(x)=10\sqrt{x}$ は $f(x)$ の逆関数であるので、

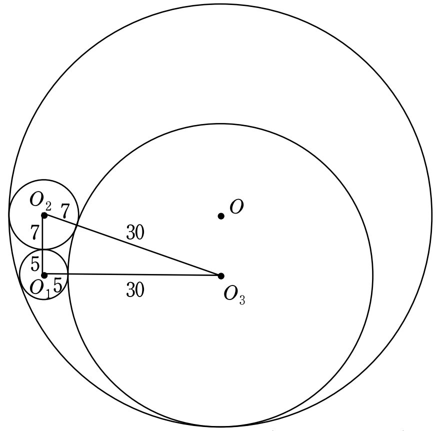
$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}[10\sqrt{k}\,]$ の値は、$y=f(x)$ のグラフ、x 軸、直線 $y=100$ で囲まれた領域内（y 軸上の格子点は含まず、$y=f(x)$ と $y=100$ 上の格子点は含む。）の格子点の個数に等しい。

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left(\left[\frac{k^2}{100}\right]+[10\sqrt{k}\,]\right)$ の値は、x 軸と y 軸、$x=100$、$y=100$ で囲まれる領域内（x 軸、y 軸上の格子点は含まず、$x=100$、$y=100$ 上の点は含む）の格子点の個数を、$y=f(x)$ 上の格子点を重複して数えたものである。

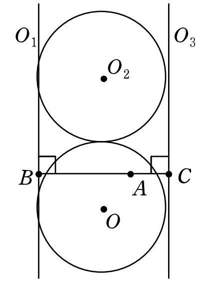
$y=f(x)$ 上の格子点は 10 個あるので、求める値は

$100\times100+10=10010$ …（答）

12 半径の長さが 5，7，30 である円 O_1，O_2，O_3 が互いに外接している。このとき，その外側から円 O_1，O_2，O_3 に接する円 O の半径を求めよ。

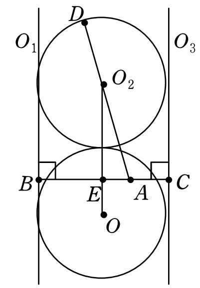


解答



余弦定理を利用して計算する方法でもよいが，ここでは反転を利用した方法で解答する。
円 O_1，O_3 の接点を A とし，点 A を中心とする半径 1 の円に関する反転を考える。
右図のように円 O_1，O_3 は 2 本の平行線になり，その間にはさまれるようにして円 O_2 と円 O が接している。点 A から直線 O_1，O_3 に垂線を下ろし，その足を B，C とする。
点 B は反転前でいうと，点 A を通る円 O_1 の直径の点 A とは反対側の端なので，反転後は $AB=\dfrac{1}{10}$ である。同様に点 C は点 A を通る円 O_3 の直径の点 A とは反対側の端なので，反転後は $AC=\dfrac{1}{60}$ である。したがって $BC=AB+AC=\dfrac{7}{60}$ であり，これは円 O_2，O の直径の大きさに等しい。反転前の円 O の半径がほしいので，点 A と円 O の位置関係を調べる。$O_1O_2{}^2+O_1O_3{}^2=O_2O_3{}^2$ なので

$\angle O_2O_1O_3=90^\circ$ である。よって　$AO_2=\sqrt{AO_1{}^2+O_1O_2{}^2}=13$ である。直線 AO_2 と円 O_2 の交点のうち点 A に近い方を D とする。$AD=6$ である。

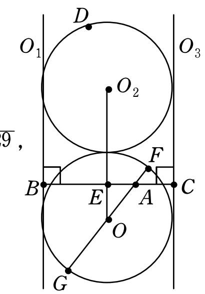


反転後は右図のように点 D は円 O_2 上で点 A から最も遠いところにあり，線分 AD は中心 O_2 を通る。反転しているので $AD=\dfrac{1}{6}$ であり，$AO_2=\dfrac{1}{6}-\dfrac{7}{120}=\dfrac{13}{120}$ である。

線分 OO_2 と線分 BC の交点を E とすると $AE=\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{120}=\dfrac{5}{120}$ である。したがって，

三角形 AEO_2 について三平方の定理より　$EO_2=\sqrt{AO_2{}^2-AE^2}=\dfrac{1}{10}$ である。

$OO_2=\dfrac{7}{60}$ なので $EO=OO_2-EO_2=\dfrac{1}{60}$ である。



三角形 AEO について三平方の定理より $AO=\sqrt{AE^2+EO^2}=\dfrac{\sqrt{29}}{120}$ である。よって，右図のように点 A を通る円 O の直径の両端について，点 A に近い方を F，遠い方を G とすると $AF=\dfrac{7-\sqrt{29}}{120}$，$AG=\dfrac{7+\sqrt{29}}{120}$ である。これを反転前に戻すと $AF=42+6\sqrt{29}$，$AG=42-6\sqrt{29}$ なので，円 O の直径の大きさは $AF+AG=84$ となり，
したがって，求める円 O の半径は 42 である。