1 【1998 British Mathematical Olympiad 改題】

4000 人が 200 組に分かれる。このとき，次の【条件】を満たす自然数 n の最小値を求めよ。

【条件】同じ人数の組が n 個までしか出来ないように分かれることができる。

解答

答え　：$n=6$

考え方：200 を n で割ったときの商を q，余りを r とすると，最も人数が少なくなるのは，

1 人の組を n 個，2 人の組を n 個，……，q 人の組を n 個，$(q+1)$ 人の組を r 個

と分かれるときである。このとき，各組の人数の合計を a_n とすると，

$$a_n=1\cdot n+2\cdot n+\cdots\cdots+q\cdot n+(q+1)r=(1+2+\cdots\cdots+q)\cdot n+(q+1)r$$

$$=\frac{q(q+1)}{2}n+(q+1)r$$

$200=nq+r$ であるから，$a_n=\dfrac{(200-r)(q+1)+2(q+1)r}{2}=\dfrac{(200+r)(q+1)}{2}$

今，人数は 4000 人であるから，$4000\geqq a_n$ でなければならない。

$(q+1)r\geqq 0$ なので，$a_n\geqq 100(q+1)$　　したがって，$q\leqq 39$ が必要である。

すると，$200=nq+r<nq+q\leqq 40n$　から　$n>5$ でなければならない。

ここで

1 人の班を 6 個，2 人の班を 6 個，……，33 人の班を 6 個，34 人の班を 1 個，600 人の組を 1 個

と分かれることができるので，$n=6$ は【条件】を満たす。

以上から，求める n の最小値は $n=6$

令和３年度　京都数学オリンピック道場　問題・略解

2 【Putnam Competition 2018】

$n<10^{100}$ を満たす正の整数のうち，以下の条件を同時に満たすものをすべて答えよ。

- n は 2^n を割り切る。
- $n-1$ は 2^n-1 を割り切る。
- $n-2$ は 2^n-2 を割り切る。

解答

次の補題を示す。

補題　$a\leqq b$ を満たす正の整数に対して，2^a-1 が 2^b-1 を割り切るための必要十分条件は

a が b を割り切ることである。

a を b で割ったときの商を q，余りを r とすると　$b=aq+r$　$(0\leqq r\leqq a-1)$　である。

Case 1　$r=0$ のとき　$\dfrac{2^{aq}-1}{2^a-1}=\dfrac{(2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\cdots+2^{a(q-1)})}{2^a-1}=1+2^a+2^{2a}+\cdots+2^{a(q-1)}$

Case 2　$r\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{2^{aq+r}-1}{2^a-1}=\dfrac{2^r2^{aq}-1}{2^a-1}=\dfrac{2^r(2^{aq}-1)}{2^a-1}+\dfrac{2^r-1}{2^a-1}=2^r(1+2^a+2^{2a}+\cdots+2^{a(q-1)})+\dfrac{2^r-1}{2^a-1}$

$r<a$ より，$0<\dfrac{2^r-1}{2^a-1}<1$ なので，2^a-1 は 2^b-1 を割り切らない。

以上より，補題が示せた。

n，$n-1$，$n-2$ がそれぞれ 2^n，2^n-1，2^n-2 を割るので，$n=2^k$ $(k\geqq 1)$　を満たす整数 k が存在する。

このとき，補題より

2^k-1 が $2^{2^k}-1$ を割り切る。　$\Leftrightarrow$　k が 2^k を割り切る。

$\Leftrightarrow$　$k=2^l$ を満たす整数 l が存在する。

$k\geqq 1$ より $l\geqq 0$ であり

$n=2^{2^l}$　　である。また，補題より

$2^{2^l}-2$ が $2^{2^{2^l}}-2$ を割り切る。$\Leftrightarrow$　$2^{2^l-1}-1$ が $2^{2^{2^l}-1}-1$ を割り切る。

$\Leftrightarrow$　2^l-1 が $2^{2^l}-1$ を割り切る。

$\Leftrightarrow$　l が 2^l を割り切る。

$\Leftrightarrow$　$l=2^m$ を満たす整数 m が存在する。

$l\geqq 0$ より $m\geqq 0$ であり　$n=2^{2^{2^m}}$　である。

$m=3$ のとき　$2^{2^{2^3}}=2^{2^8}=2^{256}<2^{300}=2^{100}\cdot 4^{100}<2^{100}\cdot 5^{100}=10^{100}$

$m=4$ のとき　$2^{2^{2^4}}=2^{2^{16}}=2^{2^2\cdot 2^{14}}=(2^4)^{2^{14}}=16^{16384}>10^{100}$

よって　$n=2^{2^{2^0}}, 2^{2^{2^1}}, 2^{2^{2^2}}, 2^{2^{2^3}}=2^2, 2^4, 2^{16}, 2^{256}$　である。

3　次の３つの条件を満たす自然数 n を考える。

(A)　10桁である。

(B)　各桁の数の和が31である。

(C)　右の位の数は、左の位の数以上である。

たとえば $n=1112333458$ は条件を満たす。

自然数 n が条件(A)(B)(C)を満たすとき，$9n$ の各桁の数の和としてありえる最大の値を求めよ。

解答

(C)を満たすような自然数 n について，$9\times n$ を筆算で計算すると，
右側の桁でくりあがりが一度起こると
それ以降の桁では必ずくりあがることがわかる。

$$
\begin{array}{r}
9\\
\times 1122557888\\
\hline
72\\
72\\
72\\
63\\
45\\
45\\
18\\
18\\
9\\
9\\
\hline
10103020992
\end{array}
$$

よって、$9n$ の各桁の数の和は「右側に同じ数字がいくつ連続するか」にのみ依存する。　…注

たとえば $n=1111234666$ なら右側が３つ 連続するので$9n$ の各桁の数の和は $9\times3=27$

$n=1233333337$ なら右側が１つ連続するので $9n$ の各桁の数の和は $9\times1=9$

したがって（A)(B)の条件の下で右側の連続する数字を最大にすると

$n=1114444444$ のときが最大となり，　このとき和は $9\times7=63$ …答

注

$1\leqq a\leqq9$ である整数 a について，$9\times a$ の十の位は $a-1$，一の位は $10-a$ だから

$n=a_9\times10^9+a_8\times10^8+a_7\times10^7+\cdots+a_0$　と書いたとき

$$
\begin{aligned}
9n=&(a_9-1)\times10^{10}\\
&+(9-a_9+a_8)\times10^9\\
&+\cdots\\
&+(9-a_k+a_{k-1})\times10^k\\
&+\cdots\\
&+(9-a_1+a_0)\times10\\
&+(10-a_0)
\end{aligned}
$$

$-a_9+a_8\geqq0$，$-a_8+a_7\geqq0$，…　であるから，一度繰り上がりがおこれば以降は必ず繰り上がる。

また、初めて繰り上がりが起こるのが 10^k の桁だとすれば　$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}>a_k$

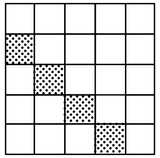
このとき $9n=[a_9][-a_9+a_8][-a_8+a_7]\cdots[-a_{k+1}+a_k][-1-a_k+a_{k-1}]\underbrace{[9][9]\cdots[9]}_{k-1\text{ 個}}[10-a_0]$

となるので，和は $9k$

4　〔著作権の関係上記載できません。〕

5 【1998 British Mathematical Olympiad 改題】

１辺の長さ５の正方形を，１辺の長さ１の正方形 25 個に分割する。各正方形に 1, 2, 3, 4, 5 の５種類の数のうち１つを選んで書き込む。その際，各行，各列，２本の対角線，のすべてにおいて，1, 2, 3, 4, 5 が１個ずつ現れるように書き込む。右の図で色の塗られた４つのマスに書かれた数の合計を「スコア」と呼ぶとき，スコアの最大値を求めよ。



解答

答え：17

理由：右の図のように書き込めば，スコアを 17 にすることができる。

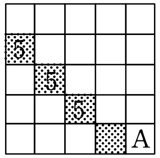
3	4	1	2	5
5	1	3	4	2
4	5	2	1	3
2	3	4	5	1
1	2	5	3	4

スコアを 18 以上に出来ないことを示す。スコアを 18 以上にするとき４つの数は，並び順を無視して

(5, 5, 5, 5)，(5, 5, 5, 4)，(5, 5, 5, 3)，(5, 5, 4, 4)

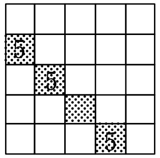
の４種類ある。これらはすべて，以下の通り不適である。

(i)



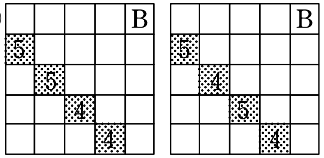
この図のとき，右下がりの対角線に５が１度現れなければならないから，Ａのマスは５である。すると，右上がりの対角線に５を書き込めるマスがない。よって，不適。

(ii)



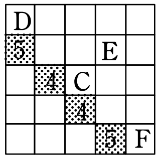
この図のとき，右下がりの対角線に５を書き込めるマスがない。よって，不適。

(iii)



この図のとき，右上がりの対角線において，４も５もＢのマスにしか書き込めない。よって，４と５のどちらかが書き込めず，不適。

(iv)



この図のとき，右下がりの対角線において，Ｃのマスは５でなければならない。また，対称性から，Ｄのマスは４であるとしてよい。すると，右上がりの対角線において，Ｅのマスは４でなければならず，したがってあと１つの４のマスはＦのマスになり，右下がりの対角線に４が２マス書き込まれる。よって，不適。

6 【2012/13 British Mathematical Olympiad】

８マス×８マスのチェス盤のマスにいくつかの石を置く。64 個のマスそれぞれについて，各マスに置ける石は１つまでとする。さらに，同じ行，同じ列，同じ対角線に５つ以上の石が置かれていないようにするとき，チェス盤上に置ける石の数は最大でいくつか。理由とともに答えよ。ただし，「対角線」は長さ８マスの２本の対角線のことを指す。

解答

答え：32 個

理由：各行に置かれている石の数は最大でも４つなので，チェス盤上の石の個数は 32 個以下でなければならない。

さらに，32 個配置することは可能である（下図）。