$\boxed{1}$ (1) $f(n)=\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}-\dfrac{\sqrt{(n+1)(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ より

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{\sqrt{97}}{\sqrt{98}}-\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{99}}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{99}}-\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}-\dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}}=\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{100}}=\dfrac{3\sqrt{11}}{10}$

(2) (ア) PQ∥TS より ∠QPS＝∠TSP

OC∥AB より ∠OPS＝∠BSP

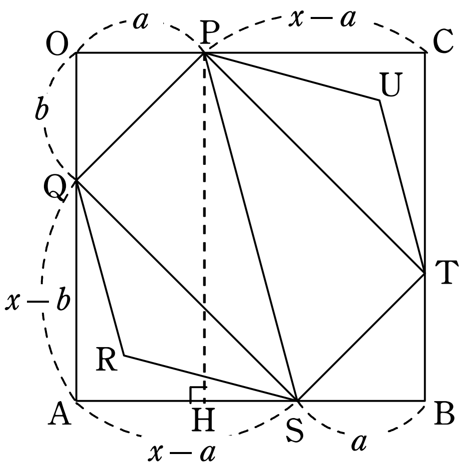
よって，∠OPS−∠QPS＝∠BSP−∠TSP

すなわち， ∠OPQ＝∠BST

よって，△OPQ ≡ △BST

(∵ 斜辺と１鋭角の等しい直角三角形)

であるから， OP＝BS



正方形の一辺を x，OP＝ a，OQ＝ b とすると，

AS＝ $x-a$ で，

$PS^2=PQ^2+QS^2$

$=(a^2+b^2)+\{(x-a)^2+(x-b)^2\}$

一方，P からAB に下ろした垂線の足をH とすると，

$PS^2=PH^2+HS^2$

$=x^2+|(x-a)-a|^2=x^2+(x-2a)^2$

よって，

$(a^2+b^2)+\{(x-a)^2+(x-b)^2\}=x^2+(x-2a)^2$

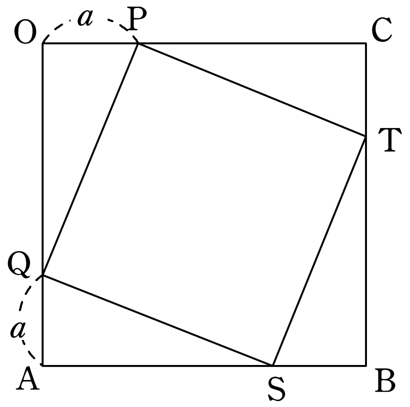
整理して，

$(a-b)(a+b-x)=0$

ここで， $a+b-x=0$ とすると $x-b=a$

となり，右図のように長方形PQST が正方形となり，矛盾。

よって， $a=b$ すなわち，OP＝OQ



(イ) (ア)より， OP＝OQ で， PQ＝1 なので， OP＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

また， OP＝AH＝SB なので，

正方形の一辺の長さを x とすると，

HS＝AB−(AH＋SB)

$=x-\sqrt{2}$

よって，△PHS において三平方の定理から

$x^2+(x-\sqrt{2})^2=2^2$

これを解いて， $x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ $(x>0)$

(3) 右図のように点R，Sをとると，四角形PRQSは

$PS=1-p$，$RQ=1-q$，$PR=SQ=\sqrt{p^2+q^2-pq}$ の等脚台形。

点PからRQへ垂線PHを下ろす。

$$PQ^2=PH^2+HQ^2$$
$$=PR^2-RH^2+HQ^2$$
$$=(p^2+q^2-pq)-\left(\frac{|(1-q)-(1-p)|}{2}\right)^2+\left(\frac{(1-p)+(1-q)}{2}\right)^2$$
$$=p^2+q^2-p-q+1$$

以上により

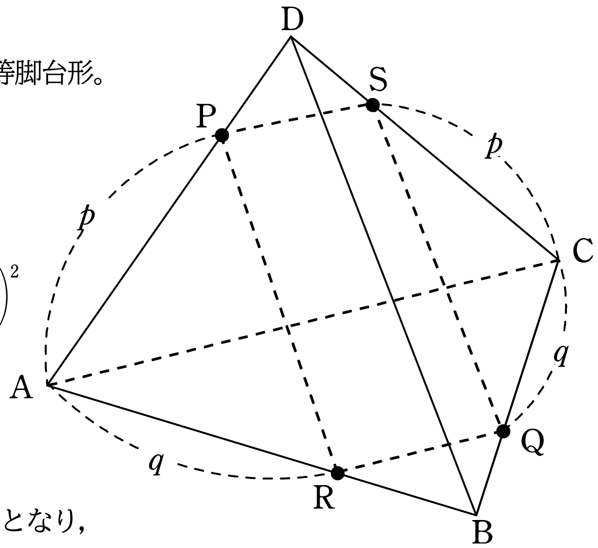
$$PQ=\sqrt{p^2+q^2-p-q+1}$$

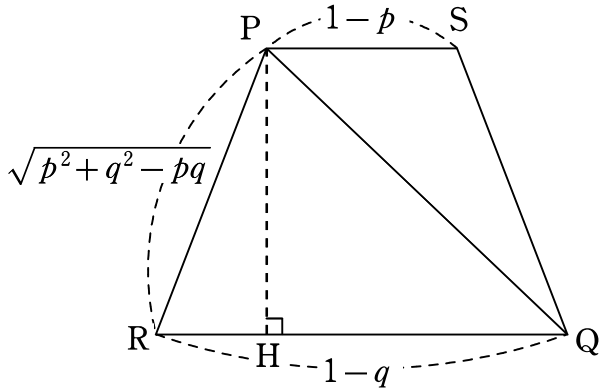
また，$PQ>0$ より，$p^2+q^2-p-q+1$ が最小のとき PQも最小となり，

$$p^2+q^2-p-q+1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(q-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

であることから，

最小値は　$p=q=\frac{1}{2}$ のとき　$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$





(4) 4日間の計画として，次の (i)～(iv) の4つの場合が考えられる。

(i) 4箇所の観光地を訪れるとき，訪れる順番は ${}_4P_4$ 通り

ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4P_4=24$ 通り

(ii) 3箇所の観光地を訪れるとき，観光地を訪れる3日間の選び方は ${}_4C_3$ 通りあり，訪れる順番は ${}_4P_3$ 通り

ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4C_3\times{}_4P_3=96$ 通り

(iii) 2箇所の観光地を訪れるとき，観光地を訪れる2日間の選び方は ${}_4C_2$ 通りあり，訪れる順番は ${}_4P_2$ 通り

ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4C_2\times{}_4P_2=72$ 通り

(iv) 1箇所の観光地を訪れるとき，観光地を訪れる1日間の選び方は ${}_4C_1$ 通りあり，訪れる順番は ${}_4P_1$ 通り

ゆえに，4日間の計画の立て方は ${}_4C_1\times{}_4P_1=16$ 通り

以上 (i)～(iv) より，4日間の計画の立て方は $24+96+72+16=208$ 通り

2　求める領域は，図１の斜線部である。また，図１の斜線部の面積は，図２の斜線部から図３の斜線部を引いた面積である。

図１

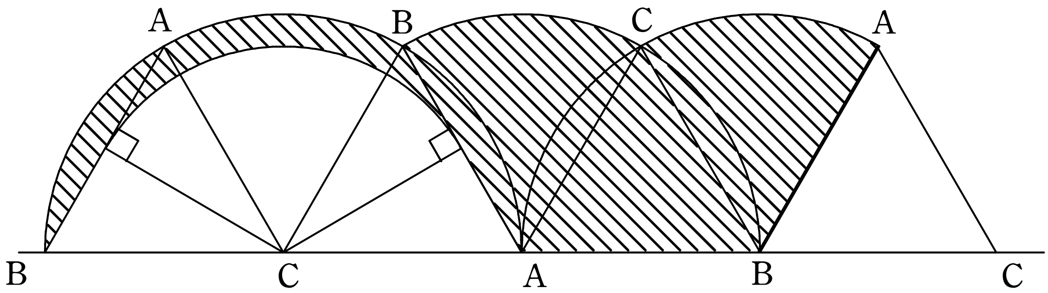


図２

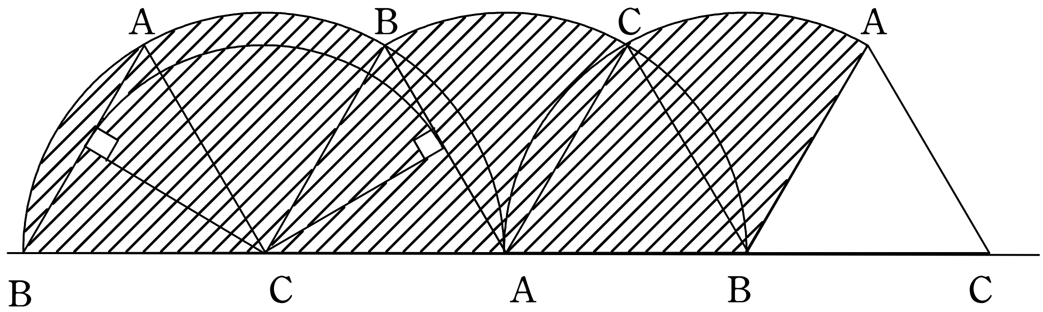
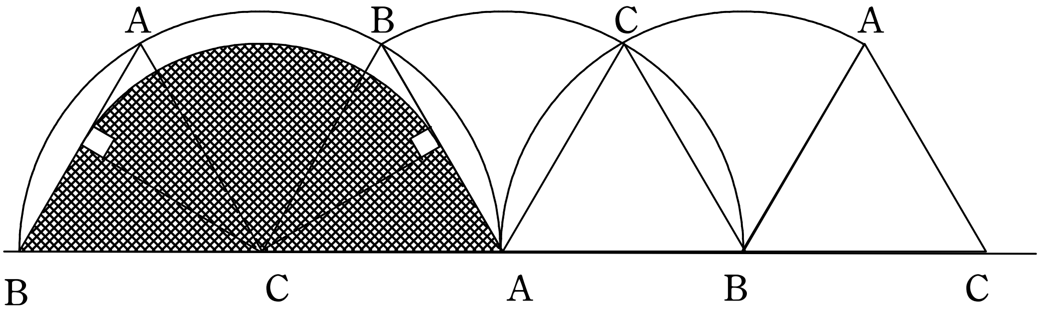
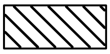
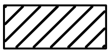
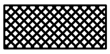


図３



∴（求める領域）＝  ＝  － 

＝｛（半径1・中心角60°の扇形）×４＋（一辺1の正三角形）×２｝

－｛（半径$\frac{\sqrt{3}}{2}$・中心角120°の扇形）＋（一辺1の正三角形）｝

$$= \left(\frac{\pi}{3} \times 1^2 \times 4 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2\right) - \left\{\frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$$

$$= \frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{3}$ (1) Bさんが n 回目に黒板に書く数字を b_n とおく。

このとき，$b_n = 3n + 1$ である。

$2021^2 = 4084441$ より

$$b_n = 3n + 1 = 4084441$$

$$n = 1361480$$

よって，Bさんが書く整数に 2021^2 が登場する。

(2) Aさんが n 回目に黒板に書く数字を a_n，Bさんが n 回目に黒板に書く数字を b_n とおく。

このとき，$a_n = 3n - 2$，$b_n = 3n$ である。

ところで，自然数 m を法を3として考えると，

$$m \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$$

$$m^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$$

よって，自然数 m の平方を3で割った余りは0または1である。

a_n は3で割ったときの余りが1となるすべての自然数を表しており，また，b_n は3で割ったときの余りが0となるすべての自然数を表している。よって，Aさん，Bさんが書いた数 a_n，b_n にすべての平方数が現れる。