令和３年度

京都・大阪マス・インターセクション

注　　意　　事　　項

１．問題は１ページから８ページまであります。

２．大問４⑵について、一部、問題文を修正してあります。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

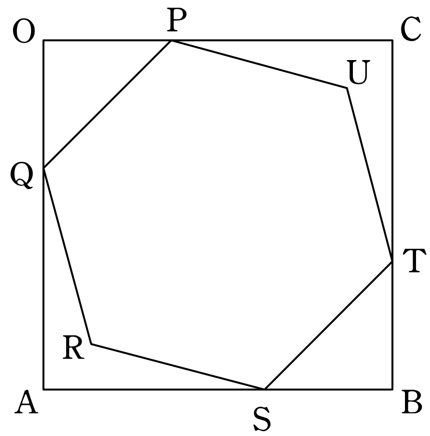
(1) $f(n)=\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ とする。

このとき，$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$ の値を求めよ。

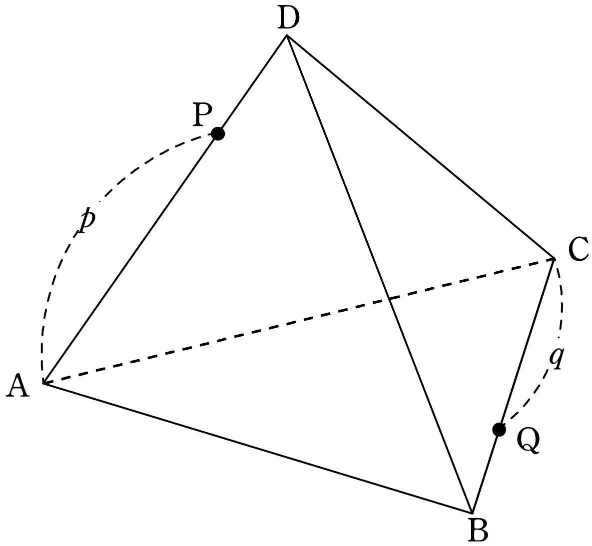
(2) 右図のように，正六角形 PQRSTU の 4 点 P，Q，S，T がそれぞれ正方形 OABC の辺 OC，OA，AB，BC 上にある。

(ア) OP＝OQ を示せ。

(イ) 正六角形 PQRSTU の一辺の長さを 1 とするとき，正方形 OABC の一辺の長さを求めよ。



(3)　右図のような一辺の長さが1の正四面体ABCDを考える。辺AD，BC上にAP＝p，CQ＝q（$0 \leqq p \leqq 1$，$0 \leqq q \leqq 1$）を満たすように点P，Qをとる。線分PQの長さをp，qを用いて表せ。また，その最小値を求めよ。

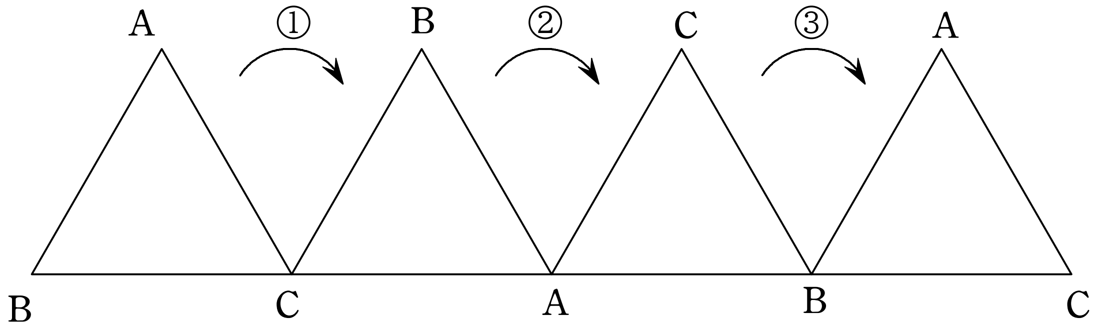


(4)　4日間の休日を利用して，4箇所の観光地のうち1箇所以上を訪れる計画を立てている。以下の「条件」を満たす4日間の計画の立て方は何通りあるか。

「条件」・ 1日に訪れることができる観光地は1箇所であり，観光地を訪れない日があってもよい ・ 同じ観光地を訪れることはない

$\boxed{2}$　一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。この正三角形を以下の手順①②③により移動させるとき，辺 AB が通過する領域の面積を求めよ。

①　まず，頂点 C を中心として，時計回りに 120° 回転させる。
②　次に，頂点 A を中心として，時計回りに 120° 回転させる。
③　最後に，頂点 B を中心として，時計回りに 120° 回転させる。



$\boxed{3}$　黒板に整数 a が書かれている。A さんと B さんは，以下の「ルール」に従って操作を行う。

「ルール」　A さん：黒板に書かれている整数を消し，消した整数に 1 を足した整数を黒板に書く。
　　　　　　B さん：黒板に書かれている整数を消し，消した整数に 2 を足した整数を黒板に書く。

この操作を，A さんと B さんが交互に繰り返し行う。最初の操作は A さんが行うものとする。

以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=1$ のとき，A さんまたは B さんが書く整数に 2021^2 は現れるか。また，現れる場合はどちらが書くことになるか。

(2)　$a=0$ のとき，どんなの平方数を考えても，A さんと B さんが書く整数に，その平方数が現れることを証明せよ。ただし，平方数とは，自然数の 2 乗で表される整数をいう。

$\boxed{4}$ 一辺の長さが2の正四面体ABCDがある。次の各問いに答えよ。

(1) 2つの面ABC，BCDの重心をそれぞれG_1，G_2とするとき，線分G_1G_2の長さを求めよ。

(2) 各頂点を中心とする半径$1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$の4個の球と，各辺の中点及び各面の重心を中心とする半径$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$の10個の球をとる。

次の「条件」を満たす経路について考える。ただし，この問題における経路とは，始点と終点が異なる途切れない1本の曲線のことをいう。

「条件」・ 球の内部と，球と球との接点のみを通ることができる ・ 1度球の内部を通った場合，その球の外部に出た後に再び内部を通ることはできない なお，内部及び外部には表面を含まないものとする

このような経路は，最大何個の球の内部を通ることができるか。その個数と，理由について述べよ。

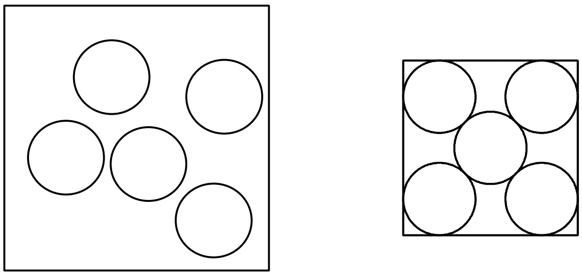
$\boxed{5}$ 一の位の数が0でない自然数 P に対して，各位の数を逆から並べてできる自然数を Q とする。

たとえば $P=12345$ のとき　$Q=54321$ である。

一の位の数が0でない5桁の自然数 P について， $P \fallingdotseq Q$ であるとする。このとき，P が Q の倍数となるような P をすべて求めよ。

$\boxed{6}$ 半径1の円が n 個あり，これを正方形の中に重ならないように収める。

たとえば，$n=5$ のとき，下図のように正方形の一辺の長さが $2\sqrt{2}+2$ で最小となる。



最小でない　　　　最小

以下の各問いに答えよ。ただし，円や正方形は互いに接してもよい。

(1) $n=6$ のとき，正方形の一辺の長さをできるだけ小さくするような円と正方形の配置を図示せよ。
また，そのときの正方形の一辺の長さを求めよ。

(2) $n=7$ のとき，正方形の一辺の長さをできるだけ小さくするような円と正方形の配置を図示せよ。
また，そのときの正方形の一辺の長さを求めよ。

$\boxed{7}$ (1) 8進法で表記された数 $12.34_{(8)}$ を10進法の小数で表せ。

(2) 10進法や8進法と同様に，記数法の底を2.5とした「2.5進法」を考える。
2.5進法で表記された数 $12.12_{(2.5)}$ を10進法の小数で表せ。

(3) 同様に，記数法の底を2.6とした「2.6進法」を考える。
2.6進法で表記された数 $1.1111\cdots_{(2.6)}$ を10進法の小数で表せ。

(4) 10進法で表記された数 $3_{(10)}$ を，2.5進法の小数で表すことを考えなさい。
ただし，(4) においては2.5進法で表す数の各桁には $0, 1, 2$ のみを用いることとします。

(5) さまざまな数 p について，p 進法を自由に考えなさい。またその性質を自由に調べなさい。