
1 一辺の長さが 1 の正三角形の内部または周上に 5 個の点をとる。

このとき、ある 2 点の距離は $\frac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

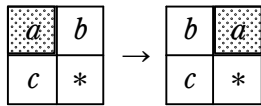
2 【JMO 1991 予選】

$\triangle ABC$ の重心を G とする。

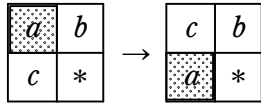
$GA = 2\sqrt{3}$, $GB = 2\sqrt{2}$, $GC = 2$ のとき $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

3 相異なる整数が書き込まれている $n \times n$ マスの方陣の a が書かれているマスに対して、右隣のマスに書かれている数 b と、真下のマスに書かれている数 c を比べ、次の [1] ~ [3] のいずれかの操作を行うことを、 a に対するスライドと呼ぶことにする。

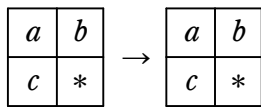
[1] a, b, c の最大値が b のとき、 a と b を入れ替える。



[2] a, b, c の最大値が c のとき、 a と c を入れ替える。



[3] a, b, c の最大値が a のとき、数の入れ替えは行わない。



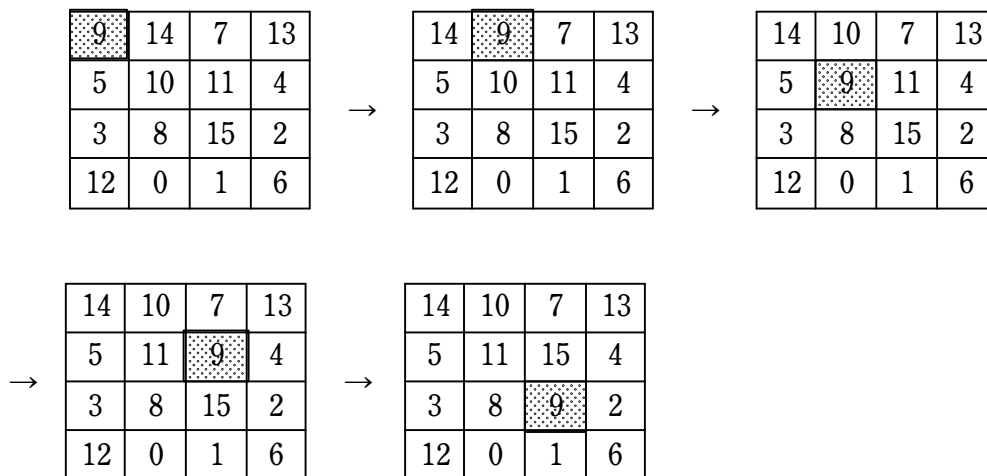
いま、 $n \times n$ マスの方陣に 0 から $n^2 - 1$ までの数を1つずつ書き込み、1番左上に書かれている数に対するスライドを次々に行うことを考える。

1番左上に $(n-1)^2$ が書き込まれているとき、 $(n-1)^2$ に対するスライドの操作を、操作が行えなくなるまで次々に行った結果、 $(n-1)^2$ が1番右下まで来るような数の配置は何通りあるか。

【4×4 の方陣での例】

9	14	7	13
5	10	11	4
3	8	15	2
12	0	1	6

に対しては、9 に対するスライドを下の図のように次々に行う。



この場合、9 は1番右下までは来ない。

4 【Hungary1995】

あるいくつかの素数の積は、それらの和の10倍である。

そのような素数の組をすべて求めよ。(すべてが異なっている必要は無い。)

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で行ってください。

5 【第25回北海道数学コンテスト（改題）】

鳩の巣原理の考え方をを使って以下の事実がいえる理由を説明したい。

何を鳩、何を鳩の巣と考えたのかを明示して説明せよ。

- (1) ある町の住民 1000 人を調査したところ、この町の住民の中には同じ誕生日の人が3人以上いる日がある。
- (2) 5以下の正の数（整数でなくともよい）を6つ考える。その中のどれか2つは必ず差が1未満になる。
- (3) 一辺の長さが70 cmの正方形の形をした射的の的があり、50発の弾丸が異なる50か所に当たった。このとき、ある2つの弾丸で、その2点間の距離が15 cm未満のものがある。
- (4) n 個の自然数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ に対して、その中の何項かをとってきて和を作る。このとき、それらの和の中で n で割り切れるものがある。

6 【British Mathematical Olympiad Round 1, 5 2015/2016】

三角形 ABC において、点 A から直線 BC に、点 B から直線 CA に、点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を、それぞれ D, E, F とする。さらに、点 D から直線 BA 、直線 BE 、直線 CF 、直線 CA に下ろした垂線の足を、それぞれ P, Q, R, S とする。

このとき、4点 P, Q, R, S は同一直線上にあることを示せ。

※原文

Let ABC be a triangle, and let D, E , and F be the feet of the perpendiculars from A, B and C to BC, CA and AB respectively. Let P, Q, R and S be the feet of the perpendiculars from D to BA, BE, CF and CA respectively. Prove that P, Q, R and S are collinear.

※この問題は自宅学習用の問題です。道場の最後に解答を渡しますので、自宅で行ってください。

7 問題2

1 つの部屋に 101 人の人がいる。このとき、次のどちらかが成り立つことを示せ。

- [1] 10 人以上の人と知り合いの人が少なくとも 1 人いる。
- [2] 11 人の人々の集団が存在し、そのどの 2 人も互いに知り合いでない。

8 【数学オリンピック予選2011-7】

3×3 のマス目があり、1 以上 9 以下の整数がそれぞれ 1 回ずつ現れるように各マスに 1 つずつ書かれている。各列に対し、そこに書かれた 3 つの数のうち 2 番目に大きな数にそれぞれ印をつけると、印のついた 3 つの数のうち 2 番目に大きな数が 5 になった。このとき、9 個の整数の配置として考えられるものは何通りあるか。