

平成19年度

京都版高校生

数学コンテスト

注 意 事 項

- 1 問題は、1ページと2ページにあります。
- 2 解答用紙は全部で5枚あります。
- 3 コンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
- 4 解答は、問題番号に対応した解答用紙にすべて記入してください。
- 5 解答時間は3時間です(13:00~16:00)。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

※ **1**については、解答用紙の枠内に答えのみ記入しなさい。

1 次の問い(1)～(4)に答えなさい。

(1) 19以上2007以下の自然数の中で、次の条件(a)～(c)をすべて満たす数の個数を求めなさい。

- (a) 3で割ると2余る
- (b) 5で割ると3余る
- (c) 7で割ると2余る

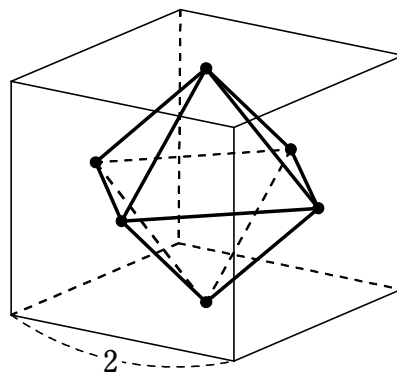
(2) $2007^1, 2007^2, 2007^3, \dots, 2007^{2007}$ のうち、一の位が7となる数は全部で何個あるか求めなさい。

(3) 自然数 n に対して、次のように定めた操作 f を行う。

操作 f : 「 n が偶数ならば n を2で割る。
 n が奇数ならば n を3倍して1を加える。」

上の操作 f を10回行う。10回目ではじめて1となる自然数をすべて求めなさい。

(4) 下の図のように、1辺の長さが2である立方体に内接する正八面体の体積と表面積を求めなさい。(正八面体の頂点は立方体の各面の対角線の交点である。)



※ 2～5については、解答用紙に答えのみでなく、考え方等も記入しなさい。

2 四角形ABCDにおいて、3辺BC, CD, DAの長さは等しく、 $\angle C=90^\circ$, $\angle D=150^\circ$ である。

このとき、 $\angle A$ と $\angle B$ の大きさを求めなさい。

3 整数の最大公約数や最小公倍数と同様に、多項式に対しても最大公約数と最小公倍数が定義できる。たとえば、 $(x+1)(x-1)$ と $(x+1)(2x+3)$ の最大公約数は $(x+1)$ 、最小公倍数は $(x+1)(x-1)(2x+3)$ である。

次の $P(x)$ と $Q(x)$ の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 3, \quad Q(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 9x + 9$$

4 4個のさいころを投げて、出た目の数の和を4で割ったときの余りを考える。余りがいくらになるときが最も確率が大きいか求めなさい。

5 右の図1は、1辺の長さが2の正二十面体である。この立体において、頂点Aから他のすべての頂点までの距離を、それぞれ2乗した総和を求めなさい。

ここで、頂点間の距離とは、2つの頂点間の最短距離とする。たとえば、右下の図2のような立方体ABCD-EFGHにおいて、頂点Aから頂点Gまでの距離は、線分AGの長さのことである。

図1

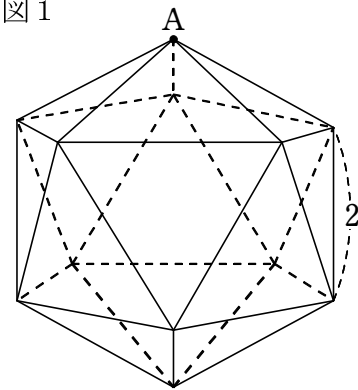


図2

