

平成20年度  
京都高校生

# 数学コンテスト

注 意 事 項

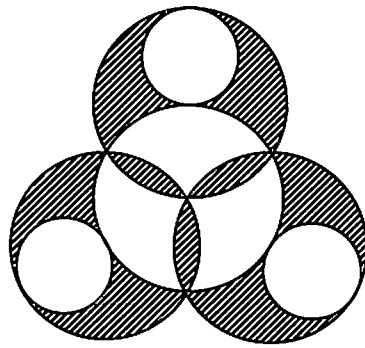
- 1 問題は、1ページと2ページにあります。
- 2 解答用紙は全部で5枚あります。
- 3 コンテスト番号と氏名をすべての解答用紙に記入してください。
- 4 解答は、問題番号に対応した解答用紙にすべて記入してください。
- 5 解答時間は3時間です(13:30~16:30)。なお、トイレ等に行く場合は監督の指示に従ってください。

※ ①については、解答用紙の枠内に答えのみ記入しなさい。

① 次の問い(1)～(4)に答えなさい。

(1)  $\frac{3}{p} + \frac{2}{q} = 1$  を満たす自然数の組  $(p, q)$  をすべて求めなさい。

(2) 京都府宮津市の智恩寺文珠堂には、下の図に示す図形の性質を問う算額が奉納されている。いま、この図形が半径  $2r$  の大円4つと半径  $r$  の小円3つから構成されており、外側の3つの大円の共有点が内側の大円の中心であるとする、図の斜線部分の面積はいくらになるか求めなさい。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

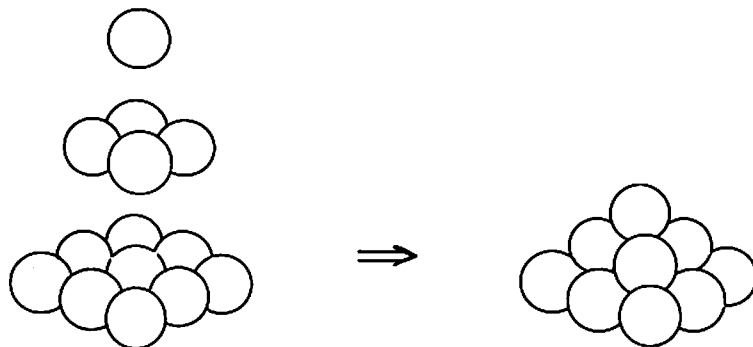


(3)  $x$  についての整式  $P(x)$  を2乗すると、

$$\{P(x)\}^2 = x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 4x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

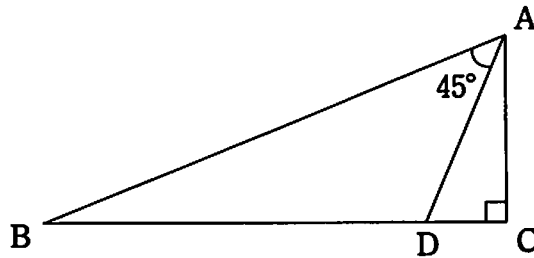
となった。整式  $P(x)$  を1つ求めなさい。

(4) 下の図のように、半径  $r$  の球14個をピラミッド状に積み上げた。このピラミッドの高さを求めなさい。



※ ②～⑤については、解答用紙に答えのみでなく、考え方等も記入しなさい。

② 下の図において、 $BD = 2AC$ であるとき、 $\angle ABD$ の大きさを求めなさい。



③ 2008個の分数  $\frac{1}{2008}, \frac{2}{2008}, \frac{3}{2008}, \dots, \frac{2008}{2008}$  の中で、既約分数であるものの和を求めなさい。ただし、既約分数とは、例えば  $\frac{3}{4}$  や  $\frac{5}{8}$  のように、それ以上約分することができない分数のことである。

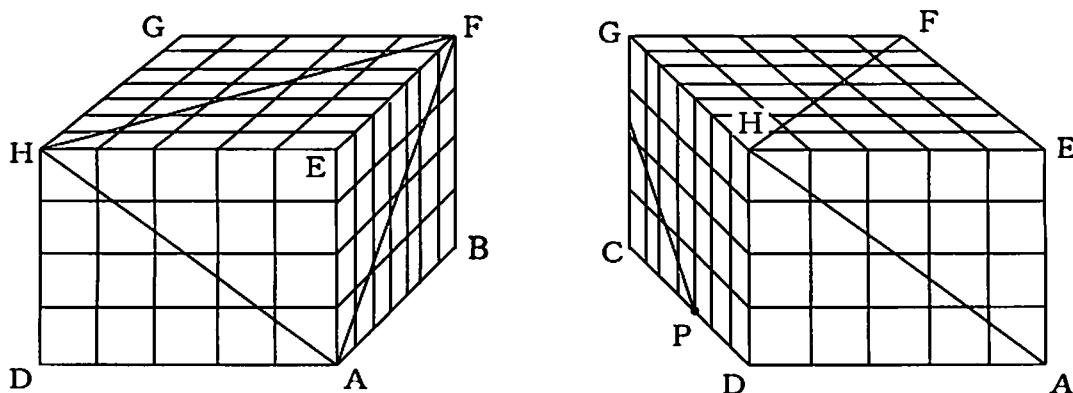
④ A, B, C, Dの4人で、次のルールにしたがって「じゃんけん」を行い、ただ1人の勝者を決める。

【ルール】

- ・ただ1人の勝者が決まるまで「じゃんけん」を繰り返し行う。
- ・「じゃんけん」をして負けた者は次の「じゃんけん」には参加できない。
- ・各回の「じゃんけん」では、必ず勝者が決まる。  
(「あいこ」になることはないものとする。)

このとき、ただ1人の勝者の決まり方は全部で何通りあるか求めなさい。

⑤ 下の図のように、1辺の長さが1の立方体140個を積み上げて、直方体 $ABCD-EFGH$ を作った。この直方体を3つの頂点A, F, Hを通る平面 $\alpha$ で切る。さらに、辺CD上に $DP = 3$ となる点Pをとり、点Pを通り平面 $\alpha$ に平行な平面 $\beta$ で切る。このとき、これら140個の立方体のうち、切り口(切断面)の一部を含む立方体の個数を求めなさい。



(直方体 $ABCD-EFGH$ を異なる2つの方向から見た図)