

教科	数学	科目	数学探究β	単位数	5	実施クラス	2年 1,2組
単元名	複数の単元の融合（次ページに記載）						

1. 授業（単元）で扱う目標・内容について

①本授業の目標（能力向上をねらいとする）Step を 、特にねらいとするものを で示しています。

Step	発想	課題・仮説設定	調査・実験計画	データ取得・処理	研究遂行,考察	表現・発表
6	複数の考えを組み合わせながら、自分の発想を再考し、新しい価値を生み出すことができる。	実験・調査結果から新しい課題を見つけ、仮説を設定することができる。	課題や期間に合わせた、適切な実験・調査計画を立案することができる。	与えられたデータを統計的に分析し、分析結果を言語化できる。	必要に応じて外部と協力しながら研究ができる。	グローバルに発信・発表ができる。
5	他者とアイデアを討論し、より良いものにしていくことができる。	仮説が適当なものがあるかを判断することができる。	先行研究を参考に、新たな見解や視点を見いだすことができる。	課題を検証するための、データの取得・分析方法を検討することができる。	課題を解決するために、仮説⇒検証を繰り返すことができる。	論理的に矛盾のない文章が書ける。論文の執筆ができる。
4	知見・知識を統合して、アイデアを見いだすことができる。	疑問に対して仮説を設定することができる。	課題に対する先行研究の調査を行うことができる。	与えられたデータの代表値、分散、相関係数等を調べられる。	得られた結果と仮説が対応するかしないかを正しく判断できる。	スライド・ポスター等を使って発表することができる。
3	身の回りの現象について自分の興味のあることを調べることができる。	調べた結果に、新たな疑問を持つ。	仮説を検証するための手段・機材を検討することができる。	実験・調査を再現できるように研究記録を正確に取ることができる。	実験・調査の条件を再検討し、調整する事ができる。	スライド、ポスター等の発表資料を作成することができる。
2	身の回りの様々な現象を比較して、違いを見つけていることができる。	書籍やインターネットを用いて疑問について調べることができる。	基本的な実験・調査技術を習得している。器具、操作の原理を理解している。	主張したい事柄に応じて適切なグラフを選択できる。	実験・調査の結果から何がわかったのかを理解することができる。	自分の意見や考えを、レポート等にまとめることができる。
1	日常の様々な出来事に興味を持ち、対象をよく観察することができる。	様々な現象に疑問を持つことができる。	実験・調査の手順を理解している。実験の結果を正しく読み取ることができる。	グラフの読み取りができる。数値とグラフの種類が与えられれば、書くことができる。	計画に基づき、手順通りに実験・調査を行うことができる。	自分の意見を持ち、失敗を恐れずに表現できる。

②本授業（単元）で習得すべき内容

- ・ 複雑な内容の問題に対して、複数の単元の知識を組み合わせて考察する。
- ・ 直前の問題で得た知識を、次の問題に生かせる。

2. 1の目標・内容を達成できたかを判断する「規準」と「方法」

規準：砂山の実験について、適切な数学の知識を用いて結果を正しく予想できる。

方法：ワークシート、グループワーク

3. 具体的な授業におけるチャレンジ（教材・発問・学習活動・めあて・ふりかえりなど）

4回の実験について、その結果を予想し、グループで交流する。

またその結果について考察する。

教材については次ページ以降に記載。

4. 授業案の概要

- 本教材の目標は、次の3点について伝えることである。
 - ・ ひとつの問題に対し、単元にまたがった数学の知識を用いることがある。
 - ・ 全ての問題を、現在の知識で解決できるとは限らない。
 - ・ その場合であっても、部分的な解決を試みることで理解を深めることができる。

- 本指導案は、教科書の学習を一通り終えたあとに分野にまたがって数学を活用する授業として作成した。作成にあたっては、平成26年に本校で行われた兵庫教育大学の濱中裕明教授による特別講義「砂の幾何学」を参考にした。

- 以下の分野の学習を終えていることを前提とする。
 - ・ 数学 I 「2次関数」
 - ・ 数学 II 「図形と方程式」
 - ・ 数学 A 「図形の性質」
 - ・ 数学 B 「ベクトル」(空間座標のみ)
 - ・ 数学 III 「無理関数」「二次曲線(注)」

(注) 二次曲線の知識については、扱う教材のうち放物線に関する部分を削除したり、軸がy軸に平行なものに取り替えたりすることで授業の題材から取り除くことができる。

必要ではないが、数学 III の微分や媒介変数の話題も扱うことができる。この授業を行うとき生徒が数学 III を学習した直後であったから、微分を用いて問題を考察した生徒が多く見られた。

5. 使用する道具

以下のものを使用する。

- | | |
|--------------|---------|
| ・ ワークシート(別紙) | ・ 金網 |
| ・ 厚紙 | ・ 砂の受け皿 |
| ・ 砂 | ・ ポリ袋 |

砂については、理科の教材である研磨用砂(カーボランダム)を使用した。その他、金網と砂の受け皿についても借用した。

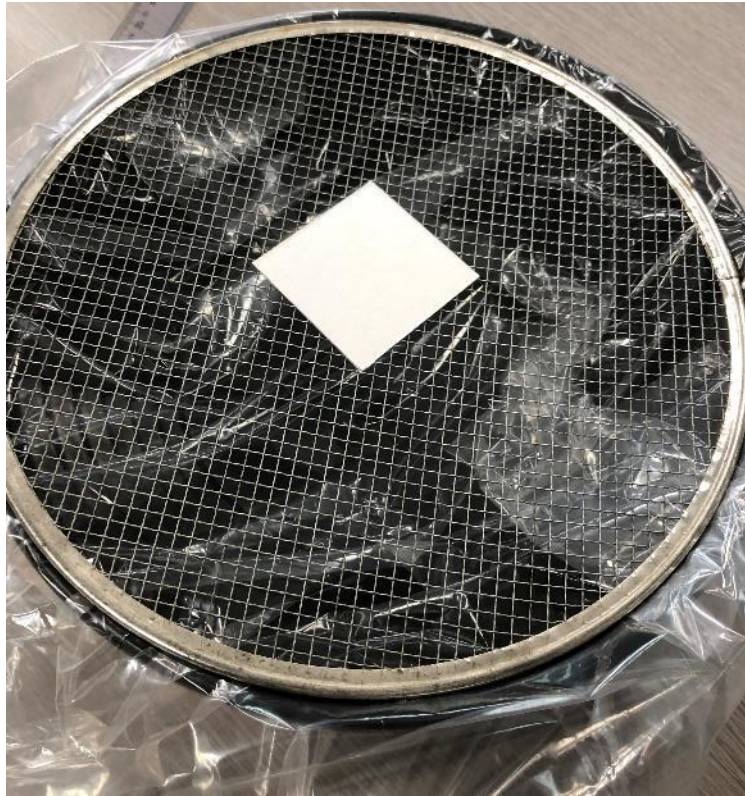


写真1 厚紙を金網の上へのせた様子



写真2 厚紙の上に砂がたまる様子

6. 教材の説明

いくつかの平面図形を選び、その形に切った厚紙を金網の上に乗せる（写真1）。その上から砂をかけることで、紙の上に砂がたまり立体図形ができる（写真2）。

本指導案では、平面図形が

- ・ 円
- ・ 正方形
- ・ 長方形
- ・ （一般の）三角形
- ・ 凸な四角形
- ・ 放物線

の場合に砂がどのような立体図形をつくるかどうかについて考察する。

乾燥した砂の場合、厚紙の上の点Pにおける砂の高さはPと厚紙の外周の距離に比例する（図1）。

したがって厚紙が円の場合、砂の形は円錐となる。また厚紙が正方形の場合は正四角錐となる。

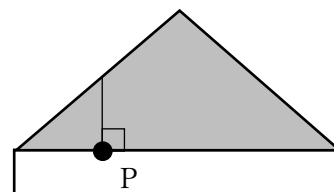


図1

一般の長方形の場合も砂の形が角錐になると予想する生徒がいるがこれは誤りで、屋根のような形ができる。上から見ると図2のようになり、等高線をひいたときにその間隔が等しくなる。これは他の図形の場合も同様。

三角形の場合には砂は三角錐を作り、その頂点は三角形の内心の真上にくる。実際に作ってみると、三角錐の辺がきれいに観察できる。

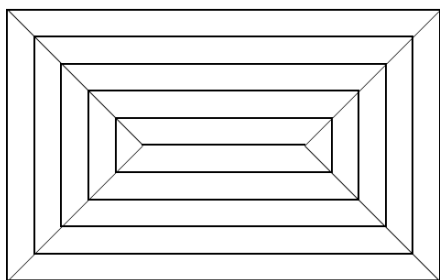


図2

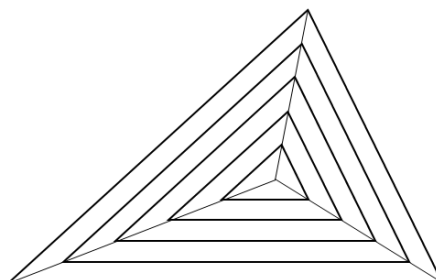


図3

長方形と三角形のことを扱ったあと、一般の凸四角形の場合を扱う。このとき、生徒には「ワークシートの四角形（図4）で実験をすると、砂の高さが最も高い場所はどこか？」と発問することが考えられる。

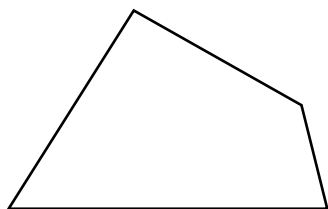


図4

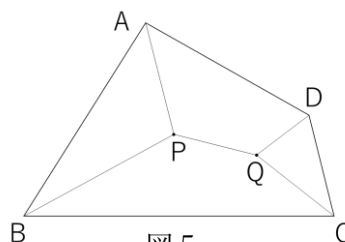


図5

生徒の多くは四角形の内角の二等分線をワークシートに書き込み、図5のような形ができると予想した。点Pと点Qのどちらの高さが高いかについても、正しく予想していた。

図形的に考察すると、点Pは図6の三角形ABEの内心、点Qは三角形CDEの傍心である。また一般の凸四角形ABCDでは、辺を延長してできる2つの三角形（図7では $\triangle ABE$ と $\triangle BCF$ ）の内接円をかき、四角形ABCDの中におさまる円を考えればよいことがわかる。

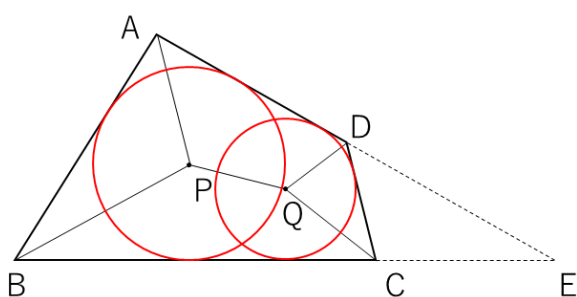


図6

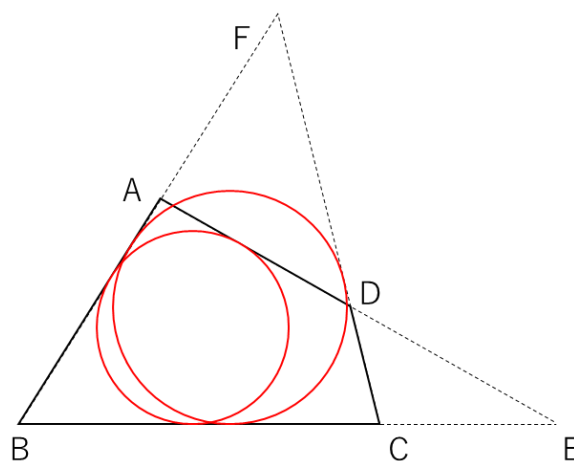


図7

放物線については、砂の作る立体図形がどのような形なのかを簡潔に記述することは困難である。今回は放物線の軸上の点に注目し、そこでの砂の高さを計算して部分的な解決を試みる。その際に数学IIの「図形と方程式」、数学Iの「二次関数」の知識を利用する。

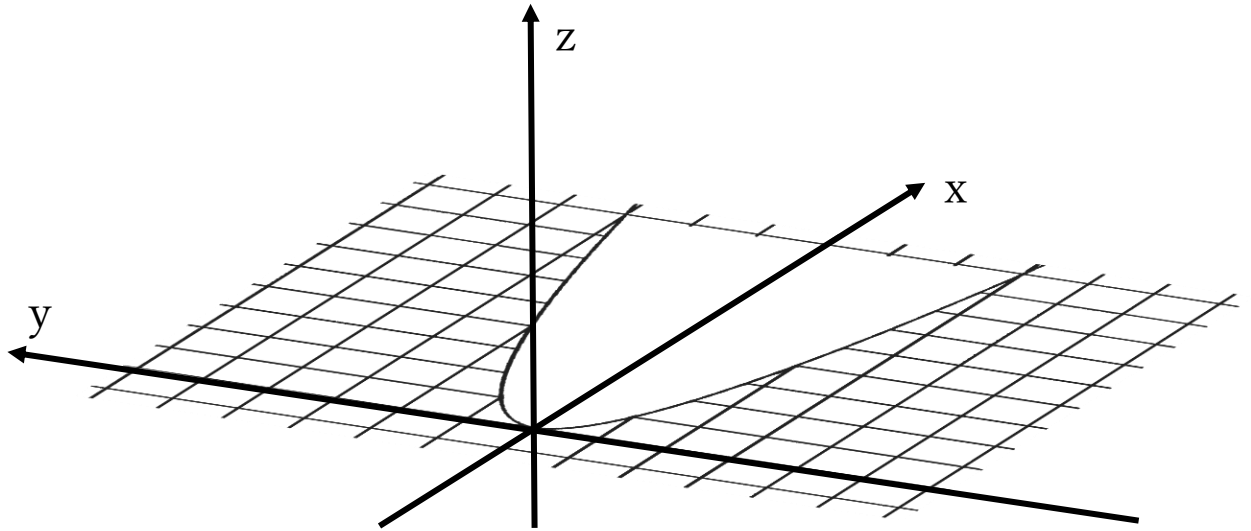


図8 放物線と座標

図8のように、放物線の方程式が $x = y^2$ となるように軸をとる。放物線の軸上の点 $P(x, 0, 0)$ に注目すると、点 P での砂の高さは点 P と放物線上をうごく点 Q の距離の最小値 $f(x)$ に比例する。

$Q(t^2, t, 0)$ とすると $PQ^2 = (t^2 - x)^2 + (t - 0)^2 + (0 - 0)^2 = t^4 + (1 - 2x)t^2 + x^2$ であるから、 $t^2 = s$ などとおくことで二次関数を用いて

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ \sqrt{x - \frac{1}{4}} & (\frac{1}{2} < x) \end{cases}$$

を得る。したがって xz 平面上の砂の高さは図9のようになる（実際には、これに比例する）。この図形で実演したときの生徒の反応は、他の図形の時よりも熱心である。

時間があればほかの平面図形についても扱おうとよい。その際どのような図形について考察するか生徒に考えさせると思考力を育てられると考えられる。

生徒が考えた例として、凸でない図形や楕円などがある。凸でない図形に関しては等高線が円弧になるなど面白い性質があるので、厚紙を事前に用意しておく時間が余ったときに対応できる。

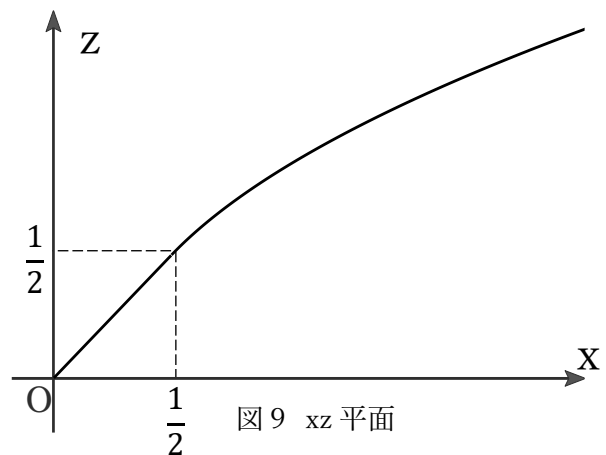
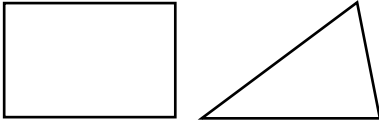


図9 xz平面

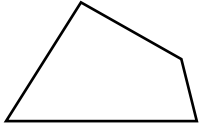
7. 授業の流れ

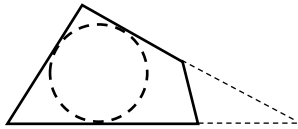
本教材は1時間（50分）で扱ったが、展開が慌ただしかったため、2時間を使用することを推奨する。

活動	生徒の動き	注意点
【導入】 (5分)		
<p>○ 授業の目的の説明 様々な単元の知識を駆使して考えてほしいことを伝える。</p> <p>○ 装置の説明 厚紙に砂をかけたとき、砂がどのような形にたまるかを予想させる。</p> <p>○ 結果の説明 円の場合と正方形の場合について、その結果を伝える。</p>	<p>円の場合は円錐、正方形の場合は四角錐になると予想する。</p>	<p>生徒によっては、断面が曲線になるような形を予想する。 砂が十分に乾燥していることなどを伝えると、多くの生徒がこちらの想定通りの予想をしてくれる。</p> <p>授業の時間がぎりぎりなので、1時間で行う場合は写真を見せて時間短縮を図るとよい。</p>
【展開1】 長方形、三角形 (15分、1時間構成の場合10分)		
<p>○ ワークシートの配布 ワークシート（別紙）の1ページ、2ページを配布し、問題1について考えさせる。 (1)(2)の考察結果をグループで交流させることを伝える。</p>	<p>問題1 (1) 長方形の場合の砂の形 (2) 三角形の場合の砂の形を考える。</p> <div style="text-align: center;">  </div>	

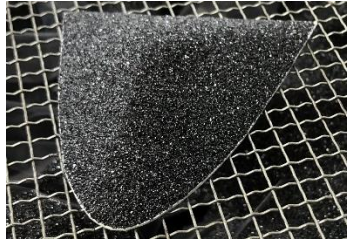
<p>○ 交流</p> <p>3～4人程度の班で交流させる。</p> <p>○ 確認、実験</p> <p>実験の前に、全体で結果の予想を共有する。</p> <p>長方形の場合と三角形の場合を実験する。三角形の場合、頂点の位置が内心の真上になることを確認する。</p>	<p>班で交流を行う。</p> <p>(1)で四角錐ができると考えた生徒は、間違いに気づく。</p> <p>(2)は三角錐になると予想するが、それ以上の考察を行う生徒は少ない。外心、重心などが一度出ると、内心を考えつく。</p> <p>砂が十分に乾燥していれば、結果はきれいな立体図形になり数学の授業で学んできたことを生かせることを確認する。</p> <p>自分の予想と結果が合致したか確認する。</p>	<p>生徒が十分に活発であれば、隣の生徒との交流でよい。</p> <p>交流の途中で、(2)の三角錐の頂点が三角形の五心のいずれになるかを聞くとよい。</p> <p>等高線が等間隔になることを確認する。</p> <p>2時間で行う場合、(1)の結果を先に見せて(2)についてもう一度考えさせてもよい。</p>
---	--	--

【展開2】 一般の凸四角形 (25分、1時間構成の場合10分)

<p>○ 個別の活動</p> <p>ワークシートの(3)について、砂の形を考えさせる。</p>  <p>時間がある程度たったら、砂が最も高くなる場所はどこか、それはどのように作図できるかを考えさせる。</p> <p>時間が余った生徒には(4) (自分で図形を考えて考察)に取り組ませる。</p>	<p>考察に(1)と(2)の結果を用いようとする。</p> <p>(1)のように等高線をひく、(2)のように内角の二等分線をひくなど様々な方法で考察する。</p> <p>解けた生徒は、(4)を考える。</p>	<p>ペンの動いていない生徒に対しては、等高線をひくように助言する。</p> <p>よくできる生徒ほど楕円について考える。楕円についての考察は難易度が高いので、いったん別な図形で考えてみることをすすめる。</p>
--	--	--

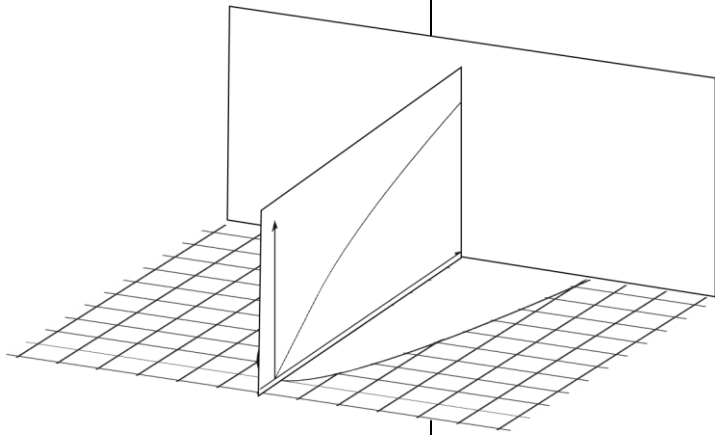
<p>○ 交流 3～4人程度の班で交流させる。</p> <p>○ 確認、実験 実験の前に、全体で結果の予想を共有する。</p> <p>実験をし、三角形の内心および傍心となること（図7）、2つの三角形を考えること（図8）を板書して確認する。</p> <p>○ まとめ 直線で囲まれた凸な領域について、一般の場合の予想をする。</p>	<p>班で交流を行う。 砂の最も高くなる点が、三角形の内心の作図を用いて得られることにたどりつく。</p>  <p>三角形の五心についての理解を深める。</p> <p>等高線を引く、二等分線をひくなどの方法で多くの図形に対応できることを確認する。 数学Aの図形分野で考えたことが使えることを確認する。</p>	<p>生徒が十分に活発であれば、隣の生徒との交流でよい。</p> <p>傍心を学習していない、あるいは忘れていた生徒も多いので確認をする。</p> <p>2時間で行う場合、(4)を扱う。凸でない多角形を考えた生徒がいれば、これを扱うと良い。その場で厚紙を切り、実験する。</p>
---	---	---

【展開3】放物線 (30分、1時間構成の場合20分)

<p>○ ワークシートの配布、説明 曲線を用いた図形について考えることを伝え、ワークシートを配布する。</p> <p>放物線の場合について完璧に考察するのは難しいから、xz平面のみ考えることを伝える。</p>	<p>xz平面という用語を忘れていた場合、復習して確認する。</p>	<p>数学A以外の知識を使うことを暗に伝えられると良い。 放物線に砂をのせた図を写真などで見せられるとよい。</p> 
--	------------------------------------	--

<p>○ 問題の説明</p> <p>放物線 $x = y^2$ について確認 放物線上の点 $P(x,0,0)$ について、その砂の高さを求める事の確認</p> <p>P から放物線への距離の最小値を求めることの確認</p> <p>○ ヒントを出す</p> <p>3分くらいでヒントを出す 放物線上の点が $Q(t^2, t, 0)$ と表せることの確認</p> <p>$f(x)$ は点 $P(x,0,0)$ と Q の距離の最小値であることを確認</p> <p>○ 結果の確認</p> <p>$f(x)$</p> $= \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ \sqrt{x - \frac{1}{4}} & (\frac{1}{2} < x) \end{cases}$ <p>であることを確認する。</p> <p>無理関数のグラフについて復習する。</p>	<p>問題設定を確認する。</p> <p>特に、P から放物線への距離の最小値 $f(x)$ を求めることを理解する。</p> <p>問題を解く。</p> <p>$PQ^2 = t^4 + (1 - 2x)t^2 + x^2$ であるので、これの最小値を求めればよいことを理解する。</p> <p>二次関数を用いて考察する。生徒によっては $t^4 + (1 - 2x)t^2 + x^2$ やその平方根を微分する。</p> <p>自分の計算結果が正しいか確認する。</p>	<p>求めるものが何なのかを正しく理解する。</p> <p>空間座標や数学 III の放物線など、複雑な分野のことが続くので、時間がかかると判断される場合、授業時間を 2 時間かけたほうがよい</p> <p>このヒントにより解きなれた形の問題になるため、解ける生徒が増える。</p> <p>ただし $t^4 + (1 - 2x)t^2 + x^2$ の最小値を求めることを二次関数の問題ととらえられず微分する生徒も多く、そのような生徒は計算に時間がかかるため注意する。PQ^2 でなく PQ を微分している場合、PQ^2 を微分するよう指導する。</p> <p>$f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で微分可能なので、砂の形はなめらかになる。</p>
---	--	---

<p>○ 実演</p> <p>図のように紙を立て、砂を落として実演する。</p> <p>複雑な場合であっても、計算することで一部を解決できることを確認する。</p>	<p>計算結果と一致することを確認する。</p> <p>$x < 1/2$ のとき、グラフが直線になることを確認する。</p>	<p>実際の砂の形は $z=f(x)$ でなく $z=f(x) \times (\text{定数})$ になるので、事前の実験をして印刷するグラフを調整する。</p>
--	---	---



【まとめ】 (5分)

<p>○ 扱った単元の確認</p> <p>空間座標の知識、放物線の知識などが抜けている生徒には復習を促す</p> <p>二次関数を使用することを思いつかなかった生徒には、二次関数が様々な問題で有効であることを伝える</p> <p>○ 授業全体のまとめ</p> <p>ひとつの問題に対し、単元にまたがった数学の知識を用いることがあることを確認する</p> <p>現実の問題については、どの単元の知識を使うかよく考えるように伝える</p>	<p>自分の学習状況を確認する</p> <p>現実の問題について数学が使えることを意識する。</p>	<p>時間に余裕があれば、他の図形についても考察する。</p>
---	--	---------------------------------

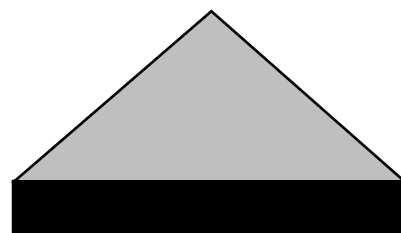
8. ワークシートなど
別紙を参照。

砂山と数学

- これは「2次関数」「平面図形」「図形と方程式」「2次曲線」などの融合分野の授業です。
いままでに自分が学んできたことをすべて発揮してください。
- 周りの席の生徒で交流してもらうことがあります。その際は自分の考えを恐れずに発表するよう心がけましょう。

砂の高さとフチからの距離の関係

砂の高さは、最も近いフチからの距離に比例する。



これにより、底面が円の場合は砂は円錐の形に
底面が正方形の場合は砂は正四角錐の形に積もる。

問題1 底面が次の形のと看、砂の形はどのような立体図形となるでしょうか。

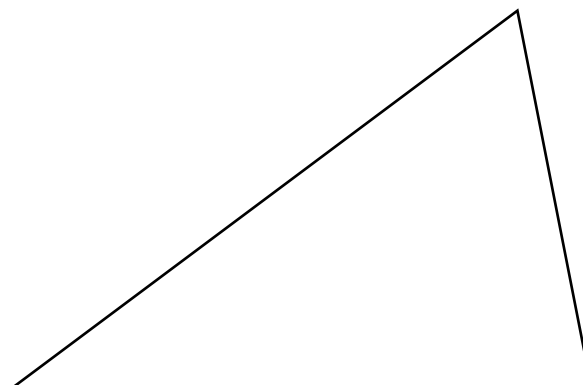
できるだけ詳しく考察しましょう。

(1) 長方形



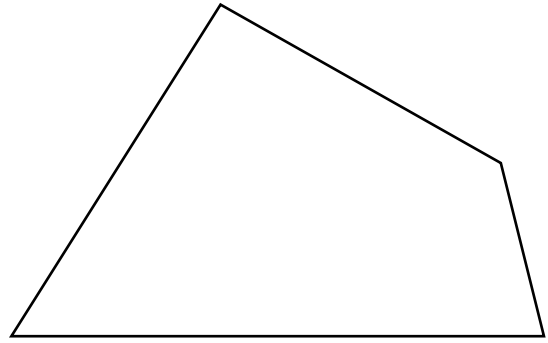
(2) 三角形

(右図は例です。さまざまな形を考えましょう)



(3) 四角形

(右図は例です。さまざまな形を考えましょう)



(4) そのほか、自分で考えた図形

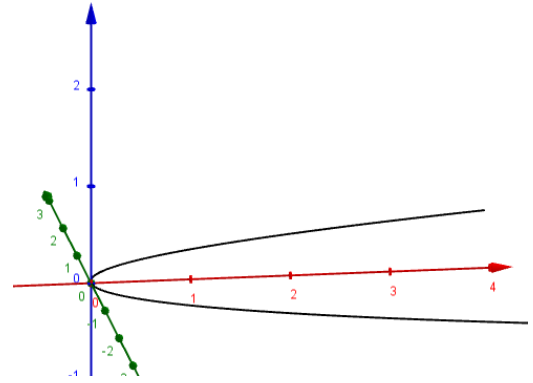
- すべての問題を、現在の知識だけで解決できるとは限らない。
- 完全に解決できない問題でも、部分的な解決を試みることで理解を深めることができる。

問題 2

底面が放物線 $x = y^2$ のとき、砂の形を完全には求めづらい。

そこで、 z 軸をとり xz 平面のみを考える。

砂山の上の面と xz 平面の共通部分が曲線 $z = f(x)$ とすると $f(x)$ はどのような式で表せるか。



(問題2) 答え

放物線上の点 $P(t^2, t)$ と $A(x, 0)$ について、 P を動かしたときの AP の最小値を x で表せばよい。

このとき $AP^2 = (t^2 - x)^2 + (t - 0)^2 = t^4 - (2x - 1)t^2 + x^2$

$s = t^2$ とおくと $AP^2 = s^2 - (2x - 1)s + x^2$
 $= \left(s - \frac{2x - 1}{2}\right)^2 + x - \frac{1}{4}$

$s \geq 0$ なので、この範囲で AP^2 の最小値を考えると

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき 最小値は x^2

$\frac{1}{2} < x$ のとき 最小値は $x - \frac{1}{4}$

AP は非負なので、 AP^2 が最小のとき AP も最小となる。

よって AP の長さの最小値は

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき x

$\frac{1}{2} < x$ のとき $\sqrt{x - \frac{1}{4}}$

で、 $A(x, 0)$ での砂の高さはこれに比例する。