

放物線を球に写した時の形

山地 欽菜

要旨

本研究では地面に描いた放物線を見た時の形を知るということを目的として実験を行った。すると、見た時の形は楕円に近いとわかった。その他の曲線についても調査した。

1. はじめに

放物線を肉眼で見た時の形を調べた。人が物を認識する場合、距離ではなく、角度のみが関係してくるので、人間の視点を球の中心として、平面に放物線を描き、それが球の表面に写った形を人間が見た時の形だとした。

2. 研究方法

2-1. 球面に写る形の計算

まずは、平面 $z = h$ 上に描かれる放物線 $y = x^2$ を描いたと設定した。放物線上の点をP, 球上の点をQとし、それぞれ変数を用いて

$$P(t, t^2, h), Q(kt, kt^2, kh)$$

と表す。ベクトルを用いて計算すると、Qの座標は、

$$Q\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t^4+h^2}}, \frac{t^2}{\sqrt{t^2+t^4+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{t^2+t^4+h^2}}\right)$$

となる。この点は、 $t \rightarrow \infty$ で $(0,1,0)$ に収束する。このことは、三次元極座標

$$(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi, \cos \varphi \sin \theta)$$

を用いても証明できる。Qの軌跡をMathematicaを用いて表示すると、図1ようになる。

ここで、Qの x 座標を $f(t)$, y 座標を $g(t)$ として xy 平面上に $x = f(t)$, $y = g(t)$ として描くと、この曲線の方程式は、

$$y^4 + x^2y^2 + x^4h^2 - y^2 = 0$$

である。

2-2. 曲率の計算

$$Q\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t^4+h^2}}, \frac{t^2}{\sqrt{t^2+t^4+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{t^2+t^4+h^2}}\right)$$

の軌跡において、 $t = 0$ 地点と $t = \pm\infty$ における曲率を計算した。曲率は、

$\overline{OQ} = (a(t), b(t), c(t))$ として、変数 s を

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a'(u)^2 + b'(u)^2 + c'(u)^2} du$$

(このとき、 $\left|\frac{d\vec{v}}{ds}\right| = \left|\frac{da}{ds}, \frac{db}{ds}, \frac{dc}{ds}\right| = 1$ が保証される)と

定義した時

$$\left|\frac{d^2}{ds^2} \vec{v}\right| = \left|\left(\frac{d^2a}{ds^2}, \frac{d^2b}{ds^2}, \frac{d^2c}{ds^2}\right)\right|$$

として計算できる。

2-3. 新たな平面への射影

次に、球面上に写った形の平面 $z = y + \sqrt{2}h$ への射影をとる。ここでの新たな平面で X, Y を軸とする座標を考え、曲線の方程式を考察する。

2-4. 他の放物線との比較

最後に $y = x^2$ ではなく、 $y = \tan x$, $y = \cosh x$ などの様々な形を平面に写し、2-1, 2-3の方法で、平面 $z = y + \sqrt{2}h$ に写し、比べた。

3. 結果

3-1. 新たな平面への射影の結果

$y = x^2$ を球に写した時の形は図1のようになる。
曲率は $t = \pm\infty, t = 0$ 地点で等しくなった。そして
2-3 で楕円のような形になった。X, Yを直交座標軸
としたとき

$$\frac{Y^2}{h^2} - \frac{2X^2}{h} = 1$$

となり、形は図7になる。

3-2. 様々な放物線との比較の結果

様々な形を 2-4 の方法で平面に写すと、

$y = \tan x$ のとき図2.3

$y = \cosh x$ のとき図4

$y = x^8$ のとき図5

$y = x^4$ のとき図6 となった。

グラフの比較については、ベクトルの図8のように、
 $t = 100$ での軌跡の速度ベクトルと
 $t = -100$ での速度ベクトル、および $t = \pm 200$ に
おける速度ベクトルのなす角 θ の \cos を計算した。

	$t = \pm 100$	$t = \pm 200$
$y = \cosh x$	-0.99918	-0.99980
$y = x^2$	-0.99661	-0.99915
$y = x^4$	-0.99858	-0.99965
$y = x^6$	-0.99896	-0.99971
$y = x^8$	-0.99914	-0.99974

表 $\cos \theta$ の値

値は、小数点第6位で四捨五入している。

4. 考察

3-1 の結果は円錐曲線によって説明できる。3-2
増加速度が速い関数であるほどその地点での内
積が-1に近づく、つまり、 $t = \pm\infty$ において、2本
の直線の交わる角度が狭くなっていくと考えられ
る。

5. まとめと今後の課題

今後の課題としては、実際にどんな形になって
いるのかがわかるような装置をつくるということが挙
げられる。

6. 添付資料

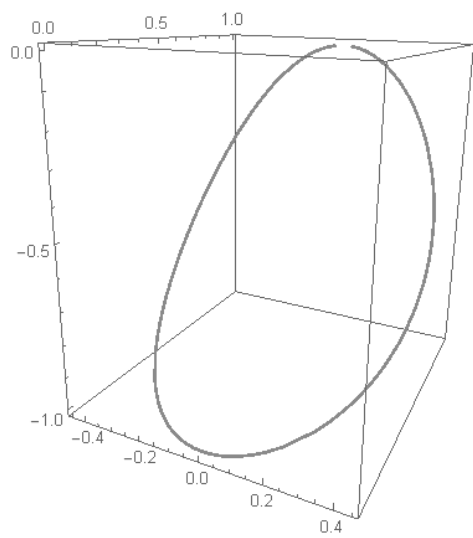


図1

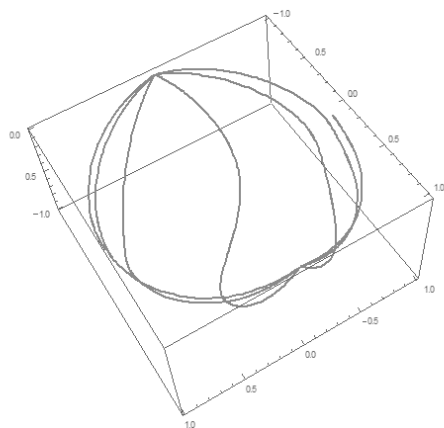


図2

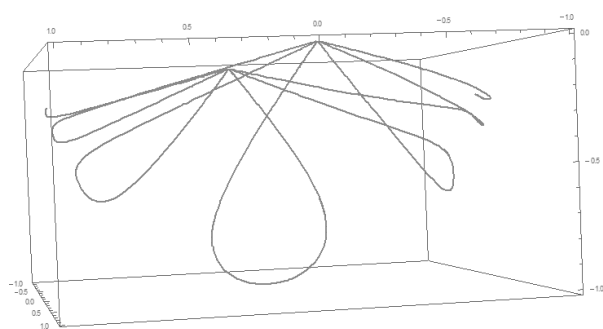


図3

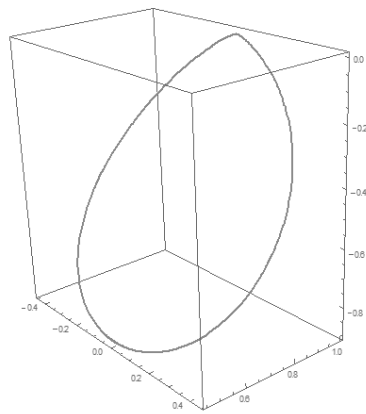


図4

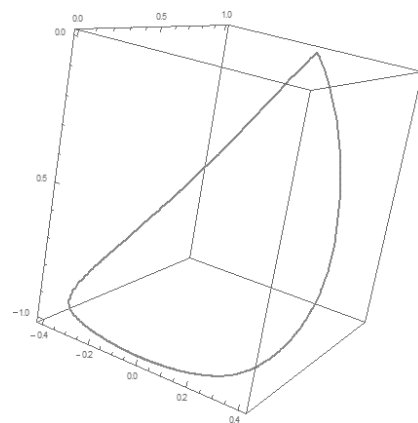


図5

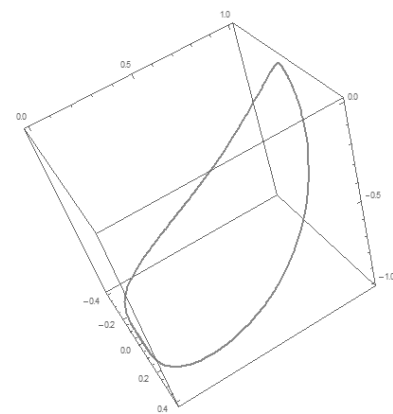


図6

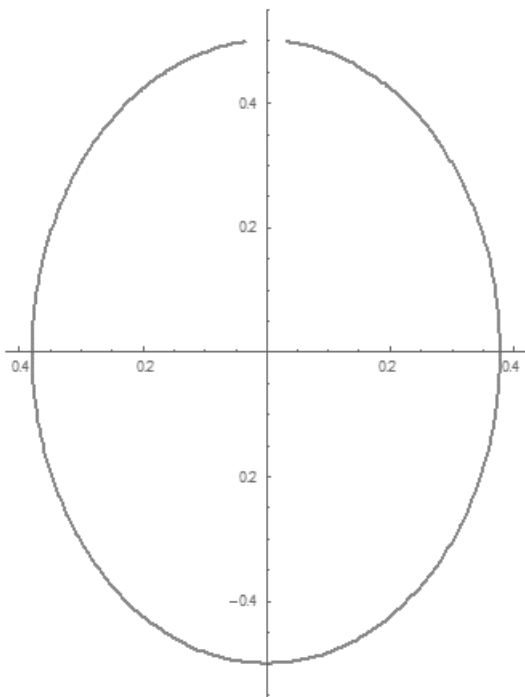


图7

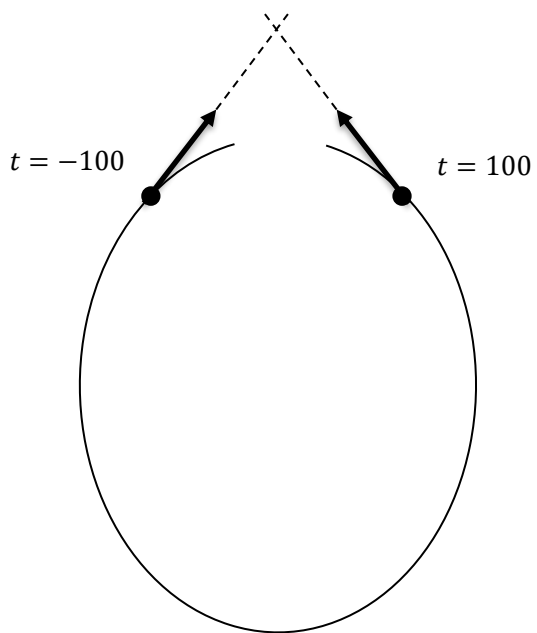


图8

XとYを等価値に扱う近似直線

保家 大将

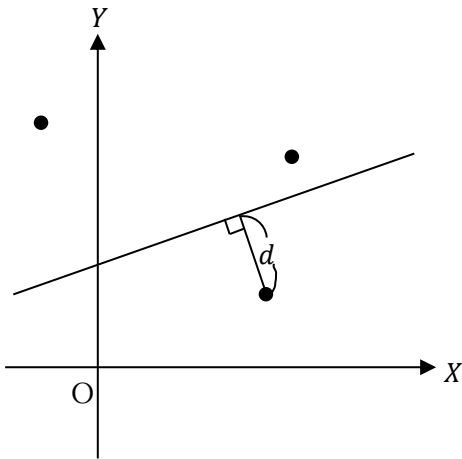
要旨

本研究では点と直線の距離の公式を利用して近似直線を求める。通常近似直線を求めるためには最小二乗法を用いるが、それは変数 X に対して従属する変数 Y を予想するとき用いるもので X と Y を等価値に扱っていない。そこで複数の点を図形的に直線で近似することで、 X と Y を等価値に扱い、直線の係数を決定する。

1. はじめに

本研究を進めるにあたって複数の点の近似方法を調べてみたところ、図形的な近似法というのはあまり見られなかった。そこで、図形的な近似には最小二乗法と比べて良い点があるのかどうかも研究対象である。

2. 研究方法



(i) 二次元において近似直線の方程式を $Y=aX+b$ とおいて、それぞれの点と $Y=aX+b$ の距離 d を考え、 $\sum d^2$ を最小化する a, b を求める。

n 点の座標を

$$a_1(x_1, y_1), a_2(x_2, y_2), \dots, a_n(x_n, y_n)$$

とする。ただし、この n 点の重心は原点にあるもの

とする。このとき

$$\begin{aligned} & \sum d^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(ax_k - y_k + b)^2}{a^2 + 1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a^2 x_k^2 + y_k^2 + b^2 - 2ax_k y_k - 2by_k + 2abx_k}{a^2 + 1} \\ &= \frac{a^2 A - 2aB + C + 4b^2}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

(ここで

$$A = \sum_{k=1}^n x_k^2, B = \sum_{k=1}^n x_k y_k, C = \sum_{k=1}^n y_k^2$$

とした。)

$\sum d^2$ を最小化する a, b を求めると次のようになる。

$$a = \begin{cases} \frac{2B}{A-C+\sqrt{(A-C)^2+4B^2}} (B \neq 0) \\ \pm\infty (A < C \text{ かつ } B = 0) \\ 0 (A > C \text{ かつ } B = 0) \end{cases}, b = 0$$

すべての実数 ($A = C$ かつ $B = 0$)

(ii) N 次元の場合で考える。近似直線を

$$l: t(a_1, a_2, \dots, a_N) \left(\text{ただし } \sum_{k=1}^N a_k^2 = 1 \right),$$

n 点の座標を

$$P_i(b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_N^{(i)}) (i = 1, 2, \dots, n)$$

とすると I と P_i の距離の二乗は,

$$\begin{aligned} d_i^2 &= \sum_{k=1}^N (a_k t - b_k^{(i)})^2 \\ &= t^2 - 2 \sum_{k=1}^N (a_k b_k^{(i)}) t + \sum_{k=1}^N (b_k^{(i)})^2 \end{aligned}$$

となる。これは,

$$t = \sum_{k=1}^N a_k b_k^{(i)}$$

で最小値

$$\sum_{k=1}^N (b_k^{(i)})^2 - \left\{ \sum_{k=1}^N a_k b_k^{(i)} \right\}^2$$

をとる。よって

$$\sum d_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N (b_k^{(i)})^2 - \left\{ \sum_{k=1}^N (a_k b_k^{(i)}) \right\}^2 \right)$$

ここで

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N (b_k^{(i)})^2$$

は定数なので,

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^N (a_k b_k^{(i)}) \right\}^2$$

を最大化する (a_1, a_2, \dots, a_N) が求める直線の傾きとなる。

3. 結果

(i) 二次元において近似直線の方程式を

$$Y = aX + b,$$

点の座標を

$$a_1(x_1, y_1), a_2(x_2, y_2), \dots, a_n(x_n, y_n)$$

とする。ただし、この n 点の重心は原点にあるものとする。このとき (a, b) は以下ようになる。

$$a = \begin{cases} \frac{2B}{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}} (B \neq 0) \\ \pm \infty (A < C \text{ かつ } B = 0) \\ 0 (A > C \text{ かつ } B = 0) \\ \text{すべての実数} (A = C \text{ かつ } B = 0) \end{cases}, b = 0$$

(ii) N 次元の場合。近似直線を

$$l: t(a_1, a_2, \dots, a_N) \text{ (ただし } \sum_{k=1}^N a_k^2 = 1)$$

とし、 n 点の座標を

$$P_i(b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_n^{(i)}) (i = 1, 2, \dots, n)$$

とすると

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^N (a_k b_k^{(i)}) \right\}^2$$

を最大化する (a_1, a_2, \dots, a_N) が近似直線の傾きとなる。

4. 今後の課題

二次元の時は近似直線が原点を通ることを示すことが出来たが三次元以上の時は証明をしていないため、証明しなければならない。そのときは直線の方程式を

$$l: t(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

として $\sum d^2$ を計算して,

$$b_1, b_2, \dots, b_n = 0$$

を導かなければならない。

またこの近似法が、最小二乗法と比べてどのようなメリットを持つのかに関しては今回明らかにかにすることができなかった。

5. その他

行列を利用して直線の式を出せることが分かっている、

$$(1,3,6), (-3, -5, 0),$$

$$(2, -4, 7), (8, 1, -3)$$

の四点の場合で実際に近似直線を求めてみると以下のようなになる。

求める直線 l を媒介変数 t を用いて

$$(x, y, z) = t(a, b, c)$$

と表す。 $A(x, y, z)$ と直線上の点 P との距離を考えると、 AP が最小となる時、直線 l の方向ベクトル

$$\vec{d} = (a, b, c). \quad (\text{ただし} |\vec{d}| = 1)$$

に対して $\vec{d} \cdot \vec{AP} = 0$ なので

$$(a, b, c)(at - x, bt - y, ct - z) = 0$$

$$t = ax - by - cz$$

よって

$$t = ax - by - cz$$

のとき AP は最小となる。

このとき

$$\begin{aligned} & \sum d^2 \\ &= \sum \{(ax - x)^2 + (by - y)^2 + (cz - z)^2\} \\ &= \sum x^2 + \sum y^2 + \sum z^2 \\ & - (a^2 \sum x^2 + b^2 \sum y^2 + c^2 \sum z^2 \\ & + 2ab \sum xy + 2bc \sum yz + 2ca \sum zx) \end{aligned}$$

$$\sum x^2 + \sum y^2 + \sum z^2$$

は定数であるから

$$D = a^2 \sum x^2 + b^2 \sum y^2 + c^2 \sum z^2$$

$$+ ab \sum xy + 2bc \sum yz + 2ca \sum zx$$

の最大値を与える (a, b, c) が求める直線となる。点が

$$(1, 3, 6), (-3, -5, 0),$$

$$(2, -4, 7), (8, 1, -3)$$

の場合

$$D = 78a^2 + 51b^2 + 94c^2$$

$$2 \cdot 18ab + 2 \cdot (-13)bc + 2 \cdot (-4)ca$$

となる。この二次形式に対応する対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 78 & 18 & -4 \\ 18 & 51 & -13 \\ -4 & -13 & 94 \end{pmatrix}$$

の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と固有ベクトルを考える。

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とすると

固有値は

$$\lambda_1 = 101.6 \dots, \lambda_2 = 81.2 \dots, \lambda_3 = 40.1 \dots$$

それぞれの固有値に属する固有ベクトルを

$$\vec{e}_1 = (e_{1,x}, e_{1,y}, e_{1,z})$$

$$\vec{e}_2 = (e_{2,x}, e_{2,y}, e_{2,z})$$

$$\vec{e}_3 = (e_{3,x}, e_{3,y}, e_{3,z})$$

とすると、

$$\vec{e}_1 = (-0.41 \dots, -0.36 \dots, 0.83 \dots)$$

$$\vec{e}_2 = (0.81 \dots, 0.26 \dots, 0.51 \dots)$$

$$\vec{e}_3 = (-0.40 \dots, 0.89 \dots, 0.18 \dots)$$

となり、ここで

$$X = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} \cdot (a, b, c) = \frac{1}{|\vec{e}_1|} (e_{1,x}a + e_{1,y}b + e_{1,z}c)$$

$$Y = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} \cdot (a, b, c) = \frac{1}{|\vec{e}_2|} (e_{2,x}a + e_{2,y}b + e_{2,z}c)$$

$$Z = \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|} \cdot (a, b, c) = \frac{1}{|\vec{e}_3|} (e_{3,x}a + e_{3,y}b + e_{3,z}c)$$

とすると

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

かつ

$$D = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2$$

であり, 条件

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

を満たす (X, Y, Z) の組のうち D を最大にするものを求めればよいことがわかる.

これは $(X, Y, Z) = (\pm 1, 0, 0)$ で最大値をとるので求める直線は

$$\begin{cases} \frac{1}{|\vec{e}_1|} (e_{1,x}a + e_{1,y}b + e_{1,z}c) = \pm 1 \\ \frac{1}{|\vec{e}_2|} (e_{2,x}a + e_{2,y}b + e_{2,z}c) = 0 \\ \frac{1}{|\vec{e}_3|} (e_{3,x}a + e_{3,y}b + e_{3,z}c) = 0 \end{cases}$$

の解

$$\begin{cases} a = -0.41 \dots \\ b = -0.36 \dots \\ c = 0.83 \dots \end{cases}$$

のときである.

6. 参考文献

最小二乗法 (直線) の簡単な説明, 2015.11.6,
<https://mathtrain.jp/leastquares>, 2018.5.7

出る目の確率が同様に確からしい7面ダイスの作成

大杉祐斗 中井朝紀 藤原優香

要旨

本研究では7面ダイスを3Dプリンターを用いて作成し、実際に振ることで確率が同様に確からしいかどうか検証した。

1. はじめに

正六面体や正八面体は存在するが、正七面体は存在しない。出る目の確率が同様に確からしい7面ダイスを作るという目的で本研究を行った。凸な七面体のうち本研究では六角錐、五角柱、三角柱の上に三角錐をのせた七面体の三種類を検証した。

2. 研究方法

2-1. 考えた多面体

位相的に異なる凸な七面体は34種類ある。そのうち本研究で六角錐(画像1)、五角柱(画像2)、三角柱の上に三角錐をのせた七面体(画像3)の三種類を検証した理由は、六角錐と五角柱はそれぞれの高さを調整することによって出る目の確率が同様に確からしくなる点があるからである。三角柱の上に三角錐をのせた七面体は数式処理システム Mathematica における座標設定の容易さを考慮した。

2-2. 仮説

ダイスの出る面が決定する直前にその面の周囲の辺が接地する。そこで、辺の接地する確率が等しくなれば面が出る確率も等しくなると考えた。

以下の2つの仮説を立てた。

(仮説①)各面の辺の長さの合計が等しいとき出る確率が等しくなる。

(仮説②)各面の面積が等しいとき出る確率が等しくなる。

2-3. 実験方法

Mathematica で仮説1, 2をそれぞれ満たすような七面体の頂点の座標を設定し、そのデータを基に3Dプリンターでダイスを作成した。

まず500回振り、ダイスの1つの面に注目してその面が出た比率を標本比率とした。その標本比率の95%信頼区間に1/7が入っているか確認し、入っていればさらに振る回数を増やし18816回(下記の95%信頼区間が1%以下になる回数)まで振る。ここで、今回調べた六角錐と五角柱はそれぞれ直錐体、直角柱で、構成する面は2種類である。そのためこの2種類の立体については1つの面が出る確率が1/7であればすべての面が出る確率は1/7である。よって1つの標本比率のみを用いた。一方三角柱(直角柱)の上に三角錐(直錐体)をのせた七面体は、構成する面が3種類であるため、2種類の面の標本比率を用いた。

このとき30cmの高さからダイスを落とした。

また、ダイスを振った際に接地面を出た面とした。

95%信頼区間は以下の通りである。

$$\left[R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$$

(R :標本比率, n :標本の大きさ)

R:標本比率は、(1が出た回数/振った回数)とする。

振る立体の名称について

- ・六角錐(仮説①)...A(画像 1)
- ・六角錐(仮説②)...B(〃)
- ・五角柱(仮説①)...C(画像 2)
- ・五角柱(仮説②)...D(〃)
- ・五角柱(仮説①, 新)...E(〃)
- ・五角柱 1...F(〃)
- ・七面体 1...G(画像 3)
- ・七面体 2...H(〃)

と定めた。

ここで、五角柱 1 とは一辺の長さが等しいもので、七面体 1 とは三角柱の上に三角錐をのせた七面体で各面の面積が等しいものである。七面体 2 は七面体 1 の三角柱の高さを $5/4$ にしたものである。五角柱(仮説①, 新)とは、五角柱(仮説①)の高さを $17/20$ にしたものである。

3. 結果

結果は以下の表の通りである。

	回数	95%信頼区間	可能性があるか
A	18030	[0.1442,0.1546]	なし
B	120	[-0.0079,0.0245]	なし
C	1003	[0.0684,0.1030]	なし
D	300	[0.0375,0.0784]	なし
E	19064	[0.1374,0.1473]	あり
F	500	[0.1969,0.2711]	なし
G	500	a [0.1649,0.2351]	なし
		b [0.1005,0.1595]	
H	500	a [0.0511,0.0969]	なし
		b [0.1575,0.2265]	

ここで a は七面体 1, 2(画像 3)において側面の三角形が出た平均の回数を, b は底面の三角形の出た回数を用いて導いた信頼区間である。

E を 500 回振った時点で 95%信頼区間に $1/7$ が入っていたので, さらに約 2000 回振り計算することを繰り返した。そして 14564 回振り終わっ

た時点で 95%信頼区間に $1/7$ が入っていたので 18816 回に達するように十分な回数振った。

4. 考察

以上の結果から立てた2つ仮説は正しくなかった。しかし E のダイスの一面の標本比率の 95%信頼区間の幅が 1%未満であり, かつこの区間に $1/7$ が入っているので, 通常の用途に耐える, 出る目の確率が同様に確からしい 7 面ダイスを作ることができた。

5. まとめと今後の課題

今後は G の三角柱の高さを調整したものを作成する。また, 他の七面体についても同様に検証する。

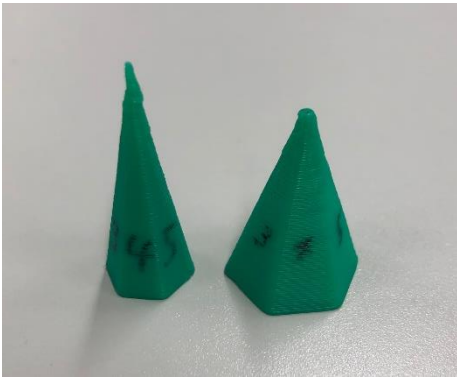
6. 参考文献

P. J. Federico, 1969, Enumeration of

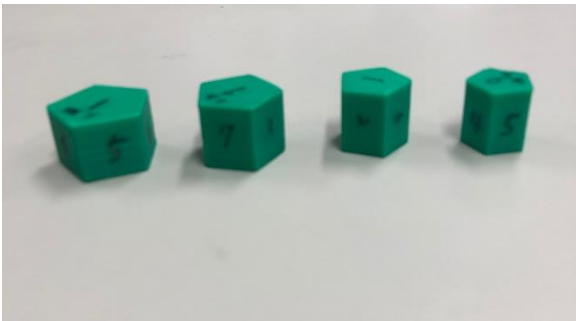
polyhedra: The number of 9-hedra, 157p

永尾 汎・岡部恒治編, 2012, 体系数学5. 数研出版株式会社, 309p

7. 参考資料



↑画像1 (右 A, 左 B)



↑画像2 (右から順に D, C, E, F)



↑画像3 (右 G, 左 H)

平成 30 年度スーパーサイエンスハイスクール
研究活動報告集

平成 31 年 3 月発行

発行者 京都府立洛北高等学校

〒606-0851 京都市左京区下鴨梅ノ木町 59

TEL 075-781-0020 FAX 075-781-2520