

## 目次

### 環境

未来の福祉をデザインする ～仮想将来世代との対話から導く日本の明日～ .....	1
	芦田航一 太田実遊花 西村春香
京都市の「いのちの森」と「糺の森」における成木と実生の毎木調査 ～京都から考える都市林の未来～ .....	4
	梅澤凌我 原田周典 安岡由都
「京都」をつくる ～京都文化の持つ地域性が育む街並み～ .....	10
	川西零陽 須磨由菜 谷淳至 本部紘
「京都人」と外国人観光客とのマナー意識の違い ～観光と生活が調和する街・京都を目指して～ .....	15
	中村有沙 野上駿介 三井有唯 南穂乃花

### 数学

非自然数階微分の定義について .....	20
	浅野青
実数階微分について .....	25
	岡優太郎 伏見宗紘
三次元における反転と図形アルベロスについて .....	30
	東谷仁
判別分析法による二値化画像及びエッジ抽出画像を用いたサポートベクトルマシン(SVM)による表情認識 ～コンピュータに自動で笑顔かどうかを判別させる～ .....	34
	安岡里都
“洗濯機”の流れを考える ～軸対称回転流モデルの利用～ .....	40
	清水花音
超音波による雨粒の除去 ～ワイパーに代わる超音波のポテンシャル～ .....	45
	高木恒佑
成長する AI ～重力付き四目並べにおける盤面評価の違いによる AI の挙動の変化～ .....	48
	尾上礼音

### 生物

肥料職人！ ～カイワレダイコンから探る肥料吸収～ .....	51
	阿部結子 後藤優和 廣瀬奈穂美
ゼブラフィッシュの行動観察 .....	56
	飯田龍成 武田錦二郎 吉田和真
シロアリ誘引剤を作る ～ドクダミを用いた環境に優しい防除～ .....	60
	田邊裕紀 椎村響 山地夏鈴

なぜ院内感染がおこるのか？ ～大腸菌培養による薬剤耐性の解明～ .....	66
	内田那々子 中川隆乃介 中野勇輝
植物性乳酸菌で腸内環境を変える～京漬け物の魔法～ .....	70
	秋間友莉子 浅田美紅
ゼブラフィッシュの左右記憶力 ～T字路実験による検証～ .....	75
	古仲達貴 佐々木友希 清水陽華莉
安いお肉を柔らかく！？ ～電気泳動で見るタンパク質分解酵素の力～ .....	80
	上田有希 大橋歩実 三木凜音
蚊の繁栄を防ぐ方法 ～ボウフラの pH 耐性 ～ .....	86
	井之川慎 喜多恭平 後藤健太郎

## 物理地学

副虹を探そう ～水の代用品 ガラスビーズを用いて～ .....	89
	強田亜美加 志波穂の花 芳井真穂子
太陽風からエネルギーを取り出す ～コイルを用いた誘導電流の検知～ .....	92
	大西翔太 新見渉 藤井信 和木隆浩
最高の建築 ～ハニカム構造は強いのか～ .....	98
	池田圭吾 菅原葵 太口悠里 中澤翔
食塩を用いたアミドによる媒晶作用の検証 ～ダイヤ型の食塩を作る～ .....	101
	笹田翔太 福井創
ヤマトシジミ貝殻の形態と生育環境 .....	106
	安達夏葵 金田わかな 南條絢音

## 化学

納豆由来の PGA を用いた水質浄化 .....	109
	川上智大 田辺みゆ 森康平
身近な食材で菌を撃退 ～辛味・香り成分による殺菌・抗菌効果～ .....	112
	東さくら 北田絢音 黒田良介 崎山美穂
宇宙で使える人工土をつくる ～発泡ウレタンによる植物の栽培～ .....	116
	浅居湧登 奥村真央 内藤瑠璃 牧野茜
エステルの組み合わせでつくる果物の香り .....	122
	澤坂綾乃 前田菜緒 向園愛花
カテキンとビタミン C の抗酸化作用には相乗効果があるのか ～Synergistic Antioxidant Effects between Catechins and VitaminC ～ .....	126
	小笹右登 小椋友菜 寺田優惟

# 非自然数階微分の定義について

浅野青

## 概要

自然数でない階数の微分の自然かつ無矛盾な定義を試みた。

### はじめに

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_{>0}, \mathbb{C}, \mathbb{R}[x], C^\infty(\mathbb{R})$ をそれぞれ自然数全体の集合, 整数全体の集合, 実数全体の集合, 正の実数全体の集合, 複素数全体の集合, 実数係数多項式全体の集合, 正則関数全体の集合とする。

連続関数  $s! : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  を条件

$$s! = \begin{cases} 1 & (s = 0) \\ s(s-1)! & (s \geq 1) \end{cases}$$

を満たす関数とする。ガンマ関数

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt$$

は  $s!$  の条件を満たす関数の一つである。

$\zeta(s)$  をリーマンゼータ関数とする。  $s \geq 1$  のとき  $\zeta(s)$  は収束することが知られている。

関数  $f$  と実数  $r$  に対して,  $f$  を  $r$  階微分して得られる  $f$  の  $r$  次導関数を  $D^r f$  と表す。

自然数階微分は

$$D^n f = \begin{cases} f' & (n = 1) \\ (D^{n-1} f)' & (n > 1) \end{cases}$$

と定義できるが, 一般の実数に関してはこのように再帰的に定義することができない。そこで, 自然数階微分の性質を実数全体に拡張したものを実数階微分の定義としようとした。

任意の  $f, g \in C^\infty[x]$  と  $m, n \in \mathbb{N}$  ( $m \leq n$ ),  $a \in \mathbb{R}$  に対して

$$f = g \Rightarrow D^m f = D^m g$$

$$(2) D^r a f = a D^r f$$

$$(3) f \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(m)} \in \mathbb{R}$$

$$(4) D^m(D^n f) = D^n(D^m f) = D^{n+m} f$$

$$(5) D^m x^n = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}$$

(6) 両辺に和が存在するとき

$$D^m \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} D^m f_i$$

が成り立つ。

ここで, 自然数  $m, n$  を任意の実数に置き換えても (1)-(6) が成り立つと仮定する。(4) より

$$D^r e^x = D^r D(e^x) = D(D^r e^x)$$

であるから,  $D^r e^x$  は微分方程式

$$y = y'$$

の解の一つである。よって  $D^r e^x$  は  $r$  の関数  $\alpha_r$  を用いて

$$D^r e^x = \alpha_r e^x$$

と表すことができる。一方 (2), (5), (6) より

$$\begin{aligned} D^r e^x &= D^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D^r \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r} \end{aligned}$$

を得る。したがって (1) より

$$\alpha_r e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r}$$

が成り立つが, 両辺に  $x = 0$  を代入すると右辺のみが発散し矛盾する。

ゆえに, これらの定義から一部を取り除いたり, 新たな定義を加えたりする必要があると思われる。

## 準備

$r \in \mathbb{R}_{>0}$  について集合  $\mathcal{K}_r, \mathcal{K}_0$  をそれぞれ

$$\mathcal{K}_r = \{f \mid \exists s \in \mathbb{R} \text{ s.t. } D^r f = sf\}$$

$$\mathcal{K}_0 = \{f \mid \forall s, t \in \mathbb{R} (s > 0) D^s f \neq tf\}$$

と定義する. このとき

$$\mathcal{K}_1 = \{ae^{bx} \mid a, b \text{ は定数}\},$$

$$\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset,$$

$$\mathbb{R}[x] \setminus \{0\} \subset \mathcal{K}_0$$

が成り立つ.

2 関数の関係  $\sim$  を

$$(f' = g \text{ または } f = g') \Rightarrow f \sim g$$

と定める. 例えば

$$x \sim 1 \sim x + 1 \sim \dots$$

ここで

$$[f] = \{g \mid f \sim g\}$$

とする. 例えば

$$[e^{ax}]$$

$$= \{ba^{-n}e^x + P \mid n \text{ は自然数で } P \text{ は } n \text{ 次以下の多項式}\} \dots$$

①,

$$[0] = \{P \mid P \text{ は多項式}\} \dots \text{ ②.}$$

また

$$\mathbb{R}'[x] = \left\{ f \mid \begin{array}{l} \exists a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{b_k} \end{array} \right\}$$

とする.

このとき

$$[0] \subset \mathbb{R}'[x],$$

$$\mathbb{R}'[x] \subset \mathcal{K}_0$$

が成り立つ.

また

$$e^x \notin \mathbb{R}'[x] \dots \text{ ③}$$

である.

$r \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して, 2 関数の関係  $\sim_\infty$  を,

$$\exists r \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (D^r f = g \text{ または } D^r g = f) \Rightarrow f \sim_\infty g$$

と定める. このとき

$$f \sim g \Rightarrow f \sim_\infty g$$

が成り立つ. また

$$[f] = \{g \mid f \sim_\infty g\}$$

とする.

## 要請

実数階微分の定義は, 自然数の範囲で自然数階微分と一致していなければならない. また, 定義が自然であるために, 実数階微分の持つべき性質として **3** の (1), (3), (6) が必要である.

しかしこれらだけでは不十分なので, 新たな定義を考えなければならない.

ところで, ほとんどの関数は, テイラー展開を用いることによって  $x$  のべき乗の和で表すことができる一方, フーリエ級数展開を用いて三角関数の和で表すこともできる. 三角関数と指数関数には密接な関係があるため, (4) (5) のように指数関数または  $x$  のべき乗について定義することができれば十分であろう. **3** で生じた矛盾は, (4) と (5) を同時に定めてしまったことによるものであると考えられる. ここで (4) と (5) の一方のみを定義に加えるのは不自然であるから, より抽象的で対称性の高い定義を考えたい.

## 定義

実数階微分の定義として, **1** の (1), (3), (6) の  $m, n$  を任意の実数に置き換えたものに, 任意の  $r \in \mathbb{R}$  に対して

$$(7) f \in \mathcal{K}_r \Rightarrow D^r f \in \mathcal{K}_r$$

(8) 任意の複素数  $a$  に対してある  $P \in \mathbb{R}'[x]$  が存在して

$$D^r e^{ax} = a^r e^{ax} + P$$

$$(9) (0) = \{P \mid P \in \mathbb{R}'[x]\}$$

(10)  $f_a(x)$  ( $a$  は定数) が連続であるとき, 関数  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, a, r) \mapsto D^r f_a(x)$  は連続である

$$(11) D^r i f = i D^r f$$

を加える. (8), (9) は **1** の ①, ② をそれぞれ拡張したものであるから自然であるといえる. これで矛盾が生じなければ実数階微分の定義は成功であろう.

ここで

$$(e^{0x}) = (1) = (0)$$

であるから, (7)  $\Rightarrow$  (8) である. よって以降 (8) は無視してよい.

次の定理 4.1, 定理 4.2 は実数階微分において最も基本的かつ実用的である.

定理 4.1. 任意の定数  $a \in \mathbb{C}$  について

$$D^r af(x) = aD^r f(x)$$

が成り立つ.

(証明) (5) より

$$\begin{aligned} D^r(f - g) &= (D^r(f - g) + D^r g) - D^r g \\ &= D^r f - D^r g \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に

$$D^r(-f) = -D^r f.$$

したがって任意の  $n \in \mathbb{Z}$  について

$$\begin{aligned} D^r nf &= nD^r f, \\ D^r \frac{1}{n} f &= \frac{1}{n} \left( nD^r \frac{1}{n} f \right) \\ &= \frac{1}{n} D^r f \end{aligned}$$

が成り立つ.

$a \in \mathbb{Q}$  の場合を考える.  $a$  は  $p, q \in \mathbb{Z}$  を用いて

$a = \frac{p}{q}$  と表されるから

$$\begin{aligned} D^r af &= D^r \frac{p}{q} f \\ &= pD^r \frac{1}{q} f \\ &= \frac{p}{q} D^r f \\ &= aD^r f. \end{aligned}$$

よって主張は任意の  $a \in \mathbb{Q}$  に対して成り立つ. (9) より  $D^r af$  は連続だから, 有理数の稠密性より, 主張は任意の  $a \in \mathbb{R}$  についても成り立つ.

$a \in i\mathbb{R}$  の場合を考える.  $b \in \mathbb{R}$  を用いて  $a = ib$  とすれば (11) より

$$\begin{aligned} D^r ibf &= iD^r bf \\ &= ibD^r f \\ &= aD^r f. \end{aligned}$$

$a \in \mathbb{C}$  のとき,  $a$  は  $a = b + ic$  ( $b, c \in \mathbb{R}$ ) と表されるから

$$\begin{aligned} D^r af &= D^r(b + ic)f \\ &= D^r bf + D^r icf \\ &= bD^r f + icD^r f \\ &= (b + ic)D^r f \\ &= aD^r f. \end{aligned}$$

よって示せた. (証明終)

定理 4.2. 任意の定数  $a \in \mathbb{C}$  について

$$D^r e^{ax} = a^r e^{ax}$$

が成り立つ.

(証明) (2), (7) よりある  $P \in \mathbb{R}'[x]$  が存在して

$$D^r e^{ax} = a^r e^{ax} + P.$$

したがって (6) より

$$\begin{aligned} D^r e^{ax} &\in \{a^r e^{ax} + P \mid P \in \mathbb{R}'[x]\} \\ &\quad \cap \{be^x \mid b \text{ は定数}\}. \end{aligned}$$

ゆえに 2 の ③ より

$$D^r e^{ax} = a^r e^{ax}$$

を得る. (証明終)

系 4.3. 任意の定数  $a \in \mathbb{C}$  について

$$D^r \sin ax = a^r \sin \left( x + \frac{\pi r}{2} \right),$$

$$D^r \cos ax = a^r \cos \left( x + \frac{\pi r}{2} \right)$$

が成り立つ.

(証明) オイラーの公式および (6) より

$$\begin{aligned} D^r \sin ax &= D^r \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \\ &= \frac{D^r e^{iax} - D^r e^{-iax}}{2i} \\ &= \frac{(ia)^r e^{iax} - (-ia)^r e^{-iax}}{2i} \\ &= a^r \frac{e^{i(x+\frac{\pi r}{2})} - e^{-i(x+\frac{\pi r}{2})}}{2i} \\ &= a^r \sin \left( x + \frac{\pi r}{2} \right). \end{aligned}$$

同様に

$$D^r \cos ax = a^r \cos \left(x + \frac{\pi r}{2}\right).$$

(証明終)

次の系 4.4 は、三角関数の無限和で表される関数にとって重要な性質である。

系 4.4. 任意の  $s, t \in \mathbb{R}$  に対して

$$D^s(D^t \sin x) = D^{s+t} \sin x$$

$$D^s(D^t \cos x) = D^{s+t} \cos x$$

が成り立つ。

$$(\text{証明}) \quad D^s(D^t \sin x) = D^s \sin \left(x + \frac{\pi t}{2}\right)$$

$$= D^s \left( \sin x \cdot \cos \frac{\pi t}{2} + \sin \frac{\pi t}{2} \cos x \right)$$

$$= \sin \left(x + \frac{\pi s}{2}\right) \cdot \cos \frac{\pi t}{2} + \sin \frac{\pi t}{2} \cos \left(x + \frac{\pi s}{2}\right)$$

$$= \sin \left(x + \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)$$

$$= D^{s+t} \sin x$$

$\cos x$  についても同様である。(証明終)

-1階微分が不定積分と一致する必要はないことに注意してほしい。

具体的な関数を実数階微分してみよう。

例 4.5.  $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$  において

$$\frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2}{6}x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx$$

である<sup>[1]</sup>.  $\sin \left(nx + \frac{1}{2}\pi\right) \leq 1$  だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sin \left(nx + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{2}}} \right| = \zeta \left(\frac{5}{2}\right).$$

同様に

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \geq -\zeta \left(\frac{5}{2}\right).$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx$$

は有界で

$$\frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{2n}} (\sin nx + \cos nx) \rightarrow 0$$

だから、和をもつ。ゆえに(6)および系 4.3 より

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2}{6}x \right) &= D^{\frac{1}{2}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} D^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}} \left( \sin nx \cdot \cos \frac{\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos nx \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{2n}} (\sin nx + \cos nx) \end{aligned}$$

となる。

1 の(5)を見ると、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して

$$D^q x^p = ax^{p-q} \dots (*)$$

が成り立つことが予想されるが、実は成り立たない。(\*)を仮定すれば定理 4.1 より  $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$  においてある定数  $a, b$  が存在して

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2}{6}x \right) &= \frac{1}{6} D^r x^3 - \frac{\pi^2}{6} D^r x \\ &= ax^{\frac{5}{2}} + bx^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{2n}} (\sin nx + \cos nx) = ax^{\frac{5}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}.$$

両辺に  $x = 0$  を代入すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{2n}} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{2n}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 \sqrt{4n}} \\ &= \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \zeta \left(\frac{5}{2}\right) < 0, \end{aligned}$$

(右辺) = 0

となり矛盾する.

### まとめ

実数階微分の定義が自然であることを追求した結果,自然数階微分と性質を共有している点では成功といえるが,いくつかの異なる性質をもっている点で,定義に矛盾が残っているか定義が不自然である可能性があると思われる.今後は定義に矛盾がないか確かめていきたい. また,ごく一部の関数しか微分することができていないので,これまでの定義から導けるかどうかを考えたい.

### 謝辞

本研究を進めるにあたり,上野健爾先生から様々なご助言を頂き,日本数学協会 第15回年次大会において,岡本和夫先生をはじめとする多くの方々に多くの知識や示唆を頂きました.ここに感謝の意を表します.

### 参考文献

- [1] 井町正弘, 内田伏一. 物理数学コース フーリエ解析. 裳華房.

# 実数階微分について

岡優太朗 伏見宗紘

## 要旨

自然数階微分を拡張した実数階微分を、べき関数の拡張や、三角関数の性質とフーリエ級数展開の拡張によって定義しようとした。べき関数の拡張では、階乗の一般形を用いた実数階微分を要請した。そして、 $e^x$ のマクローリン展開を用いて微分し、 $e^x$ の性質を用いると等式が成り立たず、要請どうしが矛盾していることが分かった。フーリエ級数を用いた拡張では  $\sin(ax + b)$ ,  $\cos(ax + b)$  の実数階微分とフーリエ級数展開を用いて周期  $2l$  の周期関数の実数階微分を定義した。このとき要請から、 $-l < x < l$  の範囲で  $e^x$  を実数階微分すると  $e^x$  になるということが考察された。

## 1. はじめに

ある関数  $f(x)$ , 例えば

$$f(x) = x^7$$

とすると、その 1 階微分, 2 階微分はそれぞれ

$$f'(x) = 7x^6, \quad f''(x) = 42x^5$$

である。このような関数では 1 階微分, 2 階微分といった自然数階微分が定義されている。

ところで、これらの高階微分において、自然数以外の階数での微分は定義されていない。ここで、 $r \geq 0$  階微分を  $D^r f(x)$  と表すとすると、例えば

$$D^{\frac{1}{2}} f(x)$$

はどのようなのだろうか。

そこで、私たちは節 2. で、べき関数の拡張を用いたり、節 3. で、フーリエ級数展開を利用したりして、実数階微分を定義し、その微分の性質について考察した。

以下、ある関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対する  $r \geq 0$  階微分を次のように表すとする。

$$f^{(r)} = D^r f$$

## 2. べき関数での性質を用いた拡張

$r$  階微分に対して次の 3 つの要請を導入する。

### 要請 2.1.

$$D^0 f = f \quad (1)$$

$$D^r a f = a D^r f \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

### 要請 2.2.

$$D^r x^t = \frac{F(t+1)}{F(t-r+1)} x^{t-r}$$

$$(t, r \in \mathbb{R}, \quad t \geq r > 0)$$

ただし、 $F(x)$  は

$$F(1) = 1$$

$$F(x+1) = xF(x)$$

をみたす関数である。

### 要請 2.3.

$$D^q(D^p f) = D^p(D^q f) = D^{p+q} f \quad (p, q \geq 0)$$

ここで、 $f = e^x$  とおくと

$$\begin{aligned} D(D^r e^x) &= D^r(D e^x) \\ &= D^r e^x \end{aligned}$$

であるから、 $y = D^r e^x$  とすると、微分方程式  $y = y'$  をみたす。よって

$$D^r e^x = \alpha(r) e^x$$

となる。ただし、 $\alpha(r)$  は  $r$  の関数である。

$e^x$  をマクローリン展開して



$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{F(k+1)}$$

これを項別微分するために、次のように要請する。

**要請 2.4.**

任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$D^n \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D^n f_k(x)$$

ならば、任意の  $r \geq 0$  に対して

$$D^r \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D^r f_k(x)$$

要請 2.4 より次の等式を得る。

ある  $r \geq 0$  が存在して

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-r}}{F(k-r+1)} = \alpha(r) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{F(k+1)}$$

が成り立つ。しかし、 $x = 0$  を代入すると左辺が発散し矛盾する。これを解消するために新たな要請を与える。

**要請 2.5.**

$r > 0, t < r$  のとき  $D^r x^t = 0$

ここで、 $t = -1, r = 1$  を代入すると

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = D^1 x^{(-1)} = 0$$

となり、既知の微分

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

と矛盾する。

このように、要請 2.1 から 2.5 のような方法で非自然数階微分を定義することはできなかった。

**3. フーリエ級数展開を用いた拡張**

$a, b$  を実数の定数とするとき、 $\sin(ax + b)$  の  $n \in \mathbb{N}$  階微分は

$$D^{(n)} \sin(ax + b) = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n}{2}\pi\right)$$

であるが、ここで  $n$  を 0 以上の実数に拡張すると次のような式を得る。

**要請 3.1.**

任意の  $r \geq 0$  に対して

$$D^{(r)} \sin(ax + b) = a^r \sin\left(ax + b + \frac{r}{2}\pi\right)$$

また次のような要請をする。

**要請 3.2.**

ある関数  $f, g$  に対する  $r \geq 0$  階微分は次の式をみたす。

$$D^0 f = f \tag{1}$$

$$D^r(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot D^r f + b \cdot D^r g \tag{2}$$

ただし、 $a, b$  は実数の定数とする。

このとき、要請 3.1 と 3.2 から

$$\begin{aligned} D^{(r)} \cos(ax + b) &= \sin\left(ax + b + \frac{r}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a^r \sin\left(ax + b + \frac{r}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a^r \cos\left(ax + b + \frac{r}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

次に、実数階微分を定義するためにフーリエ級数展開を用いる。フーリエ級数展開を用いると、ある周期  $2l$  ( $l > 0$ ) の周期関数で、 $-l < x < l$  で滑らかな関数  $f(x)$  を次のように表すことができる。以下は参考文献[1]を参照した。

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \dots \tag{1}$$

ただし

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

である。

以下、特に断りがない限り  $x$  の範囲を  $-l < x < l$  として考える。

(1)式を  $r$ 階微分するために次のことを要請する。

**要請 3.3.**

周期  $2l$  ( $l > 0$ )の周期関数で,  $-l < x < l$  で滑らかな関数  $f(x)$ において, ある  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して

$$\begin{aligned} D^m f(x) &= D^m \left( c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \\ &= D^m c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D^m \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned}$$

ならば, 任意の  $r \in \mathbb{R}$  ( $0 \leq r \leq m$ ) に対して  $D^r f(x)$

$$\begin{aligned} &= D^r \left( c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \\ &= D^r c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D^r \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned}$$

ここで, 次の命題が成り立つ.

**命題.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^m \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

が収束するとき

$$D^m f(x) = D^m c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D^m \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

である.

**proof.**

$m = 0$  のときは要請 3.2 から明らかに成り立つことが分かる.  $m = k$  ( $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) のとき

$$\begin{aligned} D^k f(x) &= D^k \left( c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \\ &= D^k c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D^k \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned}$$

が成り立つと仮定し,

また,  $F(x) = D^k f(x)$  とおくと,  $F(x)$  は周期  $2l$  の周期関数であるから, このフーリエ級数は

$$F(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

ただし

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx$$

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

また,  $F(x)$  の右辺を 1 階項別微分した関数を  $G(x)$  とおく.

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} B_n \cos \frac{n\pi x}{l} - \frac{n\pi}{l} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$D^1 F(x)$  をフーリエ級数展開すると次のように表される.

$$D^1 F(x) = c'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a'_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b'_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \dots (2)$$

$F(l) - F(-l) = 0$  であるから

$$c'_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l D^1 F(x) dx$$

$$= \frac{1}{2l} (F(l) - F(-l))$$

$$= 0$$

$$a'_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l D^1 F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{n\pi}{l} B_n + \frac{1}{l} (-1)^n (F(l) - F(-l))$$

$$= \frac{n\pi}{l} B_n$$

$$b'_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l D^1 F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= -\frac{n\pi}{l} A_n$$

よって, これらを式(2)に代入すると

$$D^1 F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} B_n \cos \frac{n\pi x}{l} - \frac{n\pi}{l} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$\therefore D^1 F(x) = G(x)$$

$F(x) = D^k f(x)$  より

$D^{k+1} f(x) = G(x)$  が成り立ち,

$$\begin{aligned} D^{k+1} f(x) &= D^{k+1} \left( c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= D^{k+1}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D^{k+1} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

よって、 $m = k + 1$ のときにも成り立つ。

数学的帰納法より任意の  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して成り立つ。 ■

次に 2 つの要請を定める。

**要請 3.4.**

$a$  を実数の定数としたとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が収束し、

$D^r f(x)$  が存在するならば

$$D^r \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} D^r f(x)$$

が成り立つ。

**要請 3.5.**

フーリエ級数の  $c_0$  において

$$c_0 = \lim_{n \rightarrow 0} \left( c_0 \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right)$$

が成り立つ。

このとき、要請 3.4 と 3.5 より

$$\begin{aligned} D^r c_0 &= D^r \left( \lim_{n \rightarrow 0} \left( c_0 \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} D^r \left( c_0 \cos \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

要請 3.1 から 3.5 を用いて実数階微分をしていく。

周期  $2l$  の周期関数  $f(x)$  に対して

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad \dots (3)$$

が成り立つ。

$r_1, r_2$  を正の定数として、

$$\sum_{n=1}^{\infty} D^{r_1+r_2} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

が収束するなら

(3)式を  $r_1$ 階微分すると

$$\begin{aligned} D^{r_1} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} D^{r_1} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^{r_1} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad \dots (4)$$

(4)式を  $r_2$ 階微分すると

$$\begin{aligned} D^{r_2} (D^{r_1} f(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^{r_1+r_2} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\ &= D^{r_1+r_2} f(x) \quad \dots (5) \end{aligned}$$

ここで次のように予想する。

**予想.**

$r \geq 0$  において

$$D^r f(x) = f(x)$$

ただし、 $f(x)$  は周期  $2l$  ( $l > 0$ ) の周期関数で

$$f(x) = e^x \quad (-l \leq x < l)$$

**考察.**

(5)式より

$$D^1 (D^r f(x)) = D^r (D^1 f(x)) = D^r f(x)$$

であるから、 $y = D^r e^x$  とすると、微分方程式  $y = y'$  をみたく。よって

$$D^r f(x) = \alpha(r) f(x) \quad (\alpha(r) : x \text{ の定数})$$

ここで、 $r \in \mathbb{Q}$  のとき  $p, q$  を互いに素な自然数

とすると、 $r = \frac{q}{p}$  とおけるから

$p \equiv 1 \pmod{2}$  のとき

$$\underbrace{D^{\frac{q}{p}} (D^{\frac{q}{p}} (\dots) D^{\frac{q}{p}} e^x \dots)}_p = \left( \alpha \left( \frac{q}{p} \right) \right)^p f(x)$$

$$D^q e^x = \left( \alpha \left( \frac{q}{p} \right) \right)^p f(x)$$

$$\therefore \alpha \left( \frac{q}{p} \right) = 1$$

また、 $f(x)$  のフーリエ級数を  $r$ 階微分すると

$$D^r f(x) = \sinh l \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^r \frac{2(-1)^n}{l^2 + (n\pi)^2} \left( l \cos \frac{n\pi x}{l} + 2n\pi \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right)$$

もし、 $\alpha(r)$  が  $0 \leq r < 1$  において連続であるなら

$$\alpha(r+1) = \alpha(r)$$

より  $0 \leq r$  で連続であり、実数の稠密性より

$$\alpha(r) = 1$$

$$\therefore D^r f(x) = f(x)$$

ただし、この実数階微分は  $l$  の範囲によって導関数が増加することに注意する。

#### 4. まとめと今後の課題

べき関数を用いて実数階微分を定義する方法では、矛盾が生じまくいかなかったが、フーリエ級数を用いた方法では、任意の周期関数においてフーリエ級数展開を用いた実数階微分が収束する限り実数階微分を定義することができた。しかし、これはそれぞれの要請どうしが互いに矛盾していないということではなく、例えば、定数項の微分について定めた要請 3.5 は正当性があるかどうか分からず、一般的な関数を実数階微分したときに矛盾を生じる可能性がある。そのため、定数項の実数階微分の正当性とそれぞれの要請が矛盾していないかの考察が必要である。さらに、今後はフーリエ変換や微分の定義式の拡張を用いた実数階微分の定義を考えて、このフーリエ級数による定義との関係性を考察したい。

#### 5. 謝辞

本研究を進めるにあたり、上野健爾先生から様々なご助言を頂きました。また、日本数学協会第 15 回年次大会にて、岡本和夫先生をはじめとする多くの方々に多くの知識や示唆を頂き、ここに感謝の意を表します。

#### 6. 参考文献

- [1] 高遠節夫・斎藤斉 ほか 4 名, 2005, 新訂 応用数学, 大日本図書株式会社, 79-90

# 三次元における反転と図形アルベロスについて

東谷仁

## 要旨

本論文の目的は 2 次元上であった反転を 3 次元上に定義を拡張し、これらを用いてアルベロスの球を定義したものである。方法として 3 次元の反転の拡張を行い、特に球すべて接しているものについて考え、計算して求めたものである。結論として 3 次元上のアルベロスは定義可能で球が接しているという条件だけでも 4 種類見つかった。

### 1. はじめに

本論文では、図形アルベロスにおけるパップスチェーンを構成する円をアルベロスの円といい、特に大きいものから 1 次アルベロスの円、2 次アルベロスの円…ということにする。また、 $n$  次アルベロスの円と  $(n+1)$  次アルベロスの円の接点をもち、これを  $n$  次アルベロスの接点ということにする。[1]より、これらの接点は必ず同一円周上にあることが証明されている。3 次元に拡張することによっておこる変化について考えたかったため、この研究を行うに至った。今回の研究の仮説は 3 次元で考えるアルベロスの接点が円の軌跡を描くというものである。研究結果は仮説と少し違い、円周上に 6 つの点が均等にできた。一方で、定義の条件を弱くすると仮説に近づくことが分かった。

まず 3 次元上の反転の定義とアルベロスの円を 3 次元上に拡張したときの定義についての考察を行う。そして、球の反転が平面に、平面の反転が球になり、さらに、接点は接点にうつすことを証明する。ここでは、接点は接点にうつすことを接点について保存するという。

### 2. 準備

3 次元上の反転については次のように定義する。

**定義 1.** 点  $O$  を中心とする半径  $r$  の球で点  $O$  と同一でない点  $P$  に対して点  $P'$  を

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{r^2}{OP^2} \overrightarrow{OP} \quad (1-1)$$

が成り立つようにとる。この点  $P'$  を点  $P$  を反転した点とよぶ。

次に三次元上のアルベロスの球を定義する。

**定義 2.** 球  $A$  (半径  $r$ )、球  $A$  の内部に球  $B$ 、球  $C$ 、球  $D$  を次を満たすようにとる。すべて互いに接して、なおかつ、すべての球の中心は同一平面上にあるものとする。ここで、すべての球に接する球  $O_1$  を定義する(図 1)。球  $O_1$  と内球 3 つのうち 2 つ、外球  $A$  を選択し、それらと接する球  $O_2$  を定義する。選択した 2 つの内球、外球は固定し、帰納的に球  $O_n$  まで定義する。この時の球  $O_n$  をアルベロスの球とする。

次に 3 次元の反転について球の反転、平面の反転、接点について考える。

### 3. 結果

**定理 1.** 球を反転すると球、または平面になる。(証明)原点以外の点を中心とする球  $\alpha$  を原点  $O$  を中心とする球で反転する。

(i) 球  $\alpha$  が原点を通るとき、反転したものは平面になることを示す。

球  $\alpha$  の中心と原点  $O$  を通る直線と球  $\alpha$  の原点ではない交点を点  $Q$ , 点  $Q$  を反転したものを点  $Q'$ , 点  $Q$  以外の球  $\alpha$  上の点を点  $R$ , 点  $R$  を反転した点を  $R'$  とする.

条件より  $\triangle OQR$  と  $\triangle OR'Q'$  について

$$OQ:OR = OR':OQ' \quad (2-1)$$

$$\angle QOR = \angle R'OQ' \quad (2-2)$$

より

$$\triangle OQR \sim \triangle OR'Q' \quad (2-3)$$

したがって

$$\angle ORQ = \angle OQ'R' = 90^\circ \quad (2-4)$$

点  $Q', R'$  を含む面は  $\overline{OR}$  を法線ベクトルに持つ. よって点  $R', Q'$  は  $\overline{OR}$  を法線ベクトルとする平面上にある.

(ii) 球  $\alpha$  が原点を通らないとき, 反転した球は球になることを示す.

原点と球  $\alpha$  の中心を通る直線の交点をそれぞれ点  $A, B$  とし, 反転したものを点  $A', B'$ , 球  $C$  上に点  $A, B$  と異なる点  $P$ , 反転したものを点  $P'$  とすると

反転の定義より

$$\triangle OAP \sim \triangle OA'P' \quad (2-5)$$

$$\triangle OBP \sim \triangle OB'P' \quad (2-6)$$

$\angle APB = 90^\circ$  上記の相似より  $\angle A'P'B' = 90^\circ$

ゆえに  $P'$  は線分  $A'B'$  を直径とする球上にある.

(i)(ii) より球を反転すると球または平面になる.

**定理 2.** 平面を反転すると球または平面になる.

(証明) 平面  $\beta$  を原点を中心とした球で反転する.

(i) 平面  $\beta$  が原点を通るとき, 平面になることを示す.

平面  $\beta$  上にある点  $P$  は反転したとき原点  $O$  を除いて点  $P'$  になるとする.

これは原点以外の平面  $\beta$  上にあることを満たす. よって原点を除く平面になる.

(ii) 原点を通らないとき

平面  $\beta$  に垂直で原点を通る直線と平面  $\beta$  の交

点を点  $B$  とする. そして反転したものを  $B'$  とする.  $B$  を除く平面  $\beta$  上にある点  $C$ , それを反転した点を点  $C'$  とすると明らかに

$$\angle BOC = \angle C'OB' \quad (2-7)$$

反転の定義より

$$OB:OC = OC':OB' \quad (2-8)$$

よって相似の関係になり,

$$\angle OBC = \angle OC'B' = 90^\circ \quad (2-9)$$

ゆえに  $C'$  は線分  $OB'$  を直径とする球上にある.

(i),(ii) より平面は反転すると球または平面になる.

**定理 3.** 曲面  $\alpha, \beta$  の接点  $A$  が存在するとき, 接点  $A$  を反転した点  $A'$  はそれぞれを反転した曲面  $\alpha', \beta'$  の接点に合致する.

(証明) 曲面  $\alpha: f(x, y, z)$  と曲面  $\beta: g(x, y, z)$  は原点ではない点  $A = \{a, b, c\}$  において接しているとする. 原点を中心とする半径  $r$  の球で反転したものをそれぞれ曲面  $\alpha', \beta'$  とし, 点  $A$  は

$$点 A' = \left\{ \frac{ar^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{br^2}{a^2+b^2+c^2}, \frac{cr^2}{a^2+b^2+c^2} \right\} \quad (3-1)$$

となる.

面  $\alpha': \bar{f}(x, y, z)$ , 面  $\beta': \bar{g}(x, y, z)$  の接点が  $A'$  であることを証明すればよい.

条件より

$$f(A) = g(A) \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial g}{\partial x}(A) \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{\partial g}{\partial y}(A) \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(A) = \frac{\partial g}{\partial z}(A) \quad (3-5)$$

が成り立つ. 反転は一意性に基づいて交点を保存するので(3-2)より

$$\bar{f}(A') = \bar{g}(A')$$

が成り立つ. また,

$$X = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$Y = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$Z = \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

とすると、反転の定義より

$$x = \frac{r^2 X}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$y = \frac{r^2 Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$z = \frac{r^2 Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\bar{f}(x, y, z) = f(X, Y, Z)$$

となる。よって、等式

$$\frac{\partial \bar{f}(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial X} = \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x}$$

をみたす。  $\bar{g}(x, y, z)$  についても同様にして (3-3)より

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(A') = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(A')$$

が成り立つ。これは  $y, z$  についても同様に言える。よって、面  $\alpha'$ 、面  $\beta'$  の接点は面  $\alpha$ 、面  $\beta$  の接点  $A'$  を反転した点に合致する。

従って接点は反転において保存される。

最初のアルベロスの球の定義 2 に基づいて球  $O_n$  の接点の動きについて仮説の検証を行う。

**定理 4.** アルベロスの球  $O_n$  と  $O_{n+1}$  の接点を  $P_n$  とする。  $P = \{P_n | n \in \mathbb{N}\}$  は同一円周上にある。

内球  $B$  を原点  $O$  で外球  $A$  と接するようになる。また、選択した内球が内球  $B$ 、内球  $C$  を定義する。原点  $O$  を中心とする半径  $2r$  の球で外球  $A$ 、内球  $B, C, D$ 、球  $O_k (k=1 \sim n)$  を反転する。すると外球  $A$ 、内球  $B$  は平面  $A'$ 、平面  $B'$  になり、それ以外は球  $O_i$  になる。接点は接点に反転するため、図 2 のようになる。図 3 は平面  $A'$ 、平面  $B'$  との距離が等しい平面  $E$  で切ったものである。

従って、選択した球  $O_n$  に対応する球  $O_i (0 \leq i \leq 5, i \equiv n \pmod{6})$  の値によって球  $O_n$  と選択した球(ここでは球  $A$ 、球  $B$ 、球  $C$ )との接

点の場所が確定することがわかった。

また、アルベロスの球を定義するのに必要な固定する内球を 1 個に減らすことで仮定した条件に近づけることができた。

**定義 3.** 球  $O_1$ 、球  $O_2$  の定義は前述と同様で球  $O_n (n \geq 3)$  が接する球を球  $O_{n-1}$ 、球  $O_{n-2}$ 、球  $A$ 、球  $B$  に接するというように定義 2 を変える。

原点を中心とする球で反転する。その結果、図 4 のようになる。また、図 5 は平面  $E$  で切った面である。

#### 4. 考察

今回の研究において、当初の目標である 3 次元上における反転については 2 次元上と同様に行えることが分かったが、球の選択によって接点の法則性が変化するということが考えられる。

#### 5. まとめと今後の課題

今回の研究結果で、最初の定義のアルベロスの球では接点が円周上に均等に 6 点でき、2 次元とは違い、有限個しかないことが分かった。定義 3 のアルベロスの球は半円を形成したことが分かった。今後の課題として、アルベロスの球を四元数を用いることによって表すことが考えられる。

#### 6. 参考文献

- [1] 山下ひな香, アルベロスのパップスチェイン, 平成 28 年度 サイエンス II 研究活動報告集 p72-p75



## 7. Geogebra による作図

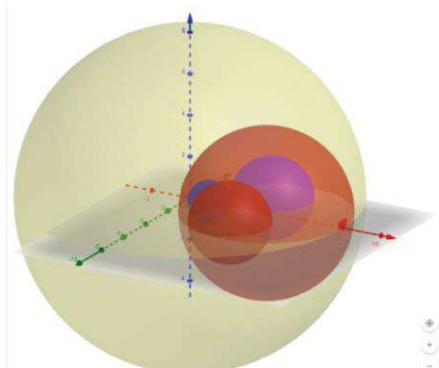


図 1. アルベロスの球の定義

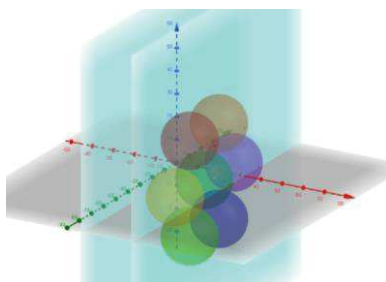


図 2. 最初の定義のアルベロスの図

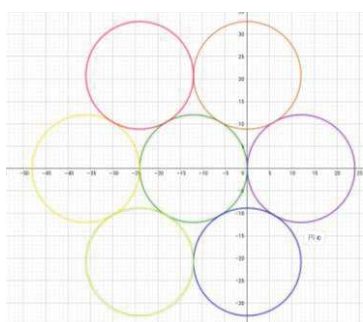


図 3. 図 2 の切断面 (緑: 球 C, 紫: 球  $O_n[n \pmod{6}=0]$ , 球 D, 橙: 球  $O_n[n \pmod{6}=1]$ , 赤: 球  $O_n[n \pmod{6}=2]$ , 黄: 球  $O_n[n \pmod{6}=3]$ , 黄緑: 球  $O_n[n \pmod{6}=4]$ , 青: 球  $O_n[n \pmod{6}=5]$ )

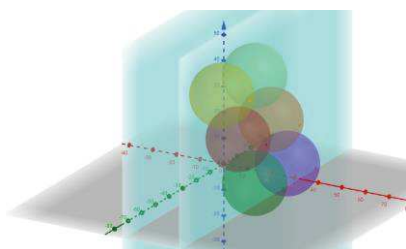


図 4. 再定義のアルベロスの図 (n=4 まで)

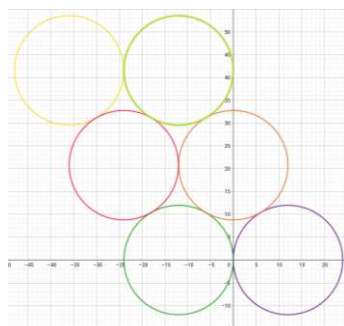


図 5. 図 4 の切断面 (緑: 球 C, 紫: 球 D, 橙: 球  $O_1$ , 赤: 球  $O_2$ , 黄緑: 球  $O_3$ , 黄: 球  $O_4$ , 図は n=4 まで)

(Markus hohenwarter et al, 2018 年, geogebra, <http://www.geogebra.org/>)



# 判別分析法による二値化画像及びエッジ抽出画像を用いた サポートベクトルマシン(SVM)による表情認識

～コンピュータに自動で笑顔かどうかを判別させる～

安岡里都

## 要旨

画像中の人物が笑顔であるか、あるいは笑顔以外の表情であるかをコンピュータに自動で判別させることを目的とし、研究を行った。一万枚の人物画像に対して判別分析法により閾値を求め二値化を行った。またその二値画像にラプラシアンフィルタを用いてエッジ抽出を行った。作成した二値画像とエッジ抽出画像を教師データとして用い、サポートベクトルマシン(SVM)により画像中の人物が笑顔であるか、あるいは笑顔以外の表情であるかを学習させた。線形カーネルを用い、正則化パラメータ  $C$  の値は 5.0, 0.5, 0.1 で比較した。笑顔画像を判別した結果の適合率・再現率・F 値は 0.8~1.0 と高く、二値画像とエッジ抽出画像を用いた場合に差はなかった。一方で笑顔以外の表情の画像を判別した結果の再現率・F 値は極めて低く、認識精度はあまり高くならなかった。

## 1. はじめに

画像処理技術の飛躍的な向上に伴い、デジタルカメラやスマートフォンなどを用いた人物撮影や顔認識認証など様々な場面において、顔認識や表情認識の技術が生かされている。顔認識・表情認識の技術は社会に広く浸透し、多くの人が利用している現状に対して、多くの研究者が今なお認識率の向上を目指し、様々な研究活動を行っている。[1][2]

本研究では、段階的に様々な技術を組み合わせた手法を用いた笑顔認識システムの構築を目指した。すなわち、画像中の人物が笑顔かどうかをコンピュータに自動で判別させることが、本研究の目的である。また、深層学習などではなく、段階的に画像処理を行うことで、細やかな調節や変更が可能であり、認識精度の向上につながると考えた。

予備実験において、人物のカラー画像(RGB画像)を用い、笑顔を判断するうえで重要な口唇領域と顔(肌)領域の分離を試みた。口唇の特徴として赤色が挙げられることから、RGB表色系に

おいて赤色の画素の抽出を行うことで笑顔かどうか判別できると予想した。しかし予想に反して口唇領域の赤画素だけを抽出することはできなかった。画像中には口唇領域以外にも頬や背景などに赤画素が多数存在することが原因だった。口唇領域の抽出同様に、肌色の画素による顔領域の抽出も試みたが、「肌色」は赤色に比べてRGB表色系における定義づけが困難なうえ、人種による違いだけでなく画像の撮影方法、または光の当たり方によっても顔の肌色は部分的に異なるために、顔領域と背景領域の分離は容易ではなかった。

予備実験の結果から、RGB表色系を用いた領域抽出に限界を感じた。そのためRGB表色系における赤(Red)、緑(Green)、青(Blue)の値による領域抽出ではなく、色相(Hue)、彩度(Saturation)、明度(Hue)の三要素からなるHSV色空間における明るさの度合いを表す明度の値、すなわち輝度値を用いることで顔領域と背景領域の分離を行うことにした。そして、2つの領域が分離した画像を用いることで笑顔認識の精度を向上させることができると考えた。

## 2. 材料・研究方法

### 2-1. 研究資料

本研究で用いた画像データは"Challenges in Representation Learning: Facial Expression Recognition Challenge"[3]という画像処理のコンテスト使われた画像セットである。画像のサイズは48×48で、あらかじめ式1によりグレースケール変換されたグレー画像である。画像には様々な人種年齢性別の人物が1つの画像につき1人写っている。人物が画像中に占める割合、人物の顔の向きは様々であるため、顔全体が画像中に収まっていない場合もある。1万枚の画像を用いた。

$$0.2126R + 0.7152G + 0.0722B \dots (式1)$$

### 2-2. 研究方法

#### 2-2.1 グレースケール変換

グレースケールとは色の濃淡の明暗を分ける方法であり、原画像にグレースケール変換の処理を行ったグレー画像は図1のようになる。



図1.グレースケール処理を行った画像例

カラーディスプレイでの色の表示方式であるRGB表色系においては、赤(Red)、緑(Green)、青(Blue)の三色の色を使い、それぞれの色の輝度を調節することで、すべての色を表現している。すなわち、各画素は3つの輝度値を持っていることになり、画像の輝度値を処理するには複雑な定義・計算が必要になる。そこで原画像の画素ごとにR、G、Bそれぞれの輝度値を取り出し、式2のように処理した値をもとの画素に戻すことで、1画素の輝度値が1つの値に定まる。

$$(R+G+B) / 3 \dots (式2)$$

#### 2-2.2 二値化処理

グレースケール変換により、RGB表色系のカラー画像を各画素値が輝度を表す輝度画像(濃淡画像)として扱うことが可能になった。各画素が8ビットデータとして表現される輝度画像において、輝度は最も暗い0から最も明るい255まで256通りで表される。画像内の各画素を暗い(黒い)画素と明るい(白い)画素の2通りに分類し、輝度画像から濃度値として0か1しか持たない二値化画像に変換する処理を二値化(二値画像化)とよぶ。二値化を行った後の二値化画像は図2のようになる。



図2.二値化を行った画像例(閾値113)

輝度画像を二値化するためには、各画素に対して暗い画素(黒画素)に属するか明るい画素(白画素)に属するかを判定する必要がある。もっとも単純な二値化手法はある閾値を設定し、閾値と各画素値の比較を行う方法(閾値処理)である。各画素の輝度値が閾値よりも大きい値であれば白画素、小さい値であれば黒画素に属すると判定する。

二値化とは、背景でない(背景とは区別したい)種々の対象物を抽出し、切り出すことを意味する。すなわち、人物画像における二値化とは背景より人物(顔)領域を切り出すことであり、二値化することにより、画像中の顔領域は白画素に、背景は黒画素になる。

二値化において閾値は対象とする輝度画像や用途によって最適な値が異なる。閾値の値によって結果画像が大きく左右されるため、閾値を決める方法は重要である。適した閾値を自動で決定する方法にはPタイル法やモード法などいくつかの方法があるが、本研究では判別分

析法（大津の方法）[4] を用いた。

判別分析法とは二値化の閾値を決定する問題を 2 クラス分離問題の枠組みでとらえた、簡単に汎用性をもった自動閾値選定法である。この方法は、分離で得られるクラスどうしの濃度レベルでの分離度を最大にする手法であり、そのため濃度ヒストグラムの累積モーメントのみを閾値決定の計算に用いる。

それぞれの画像において判別分析法により閾値を求め、各画素が閾値よりも大きければ白画素、小さければ黒画素に属すると判定し、二値化を行った。

### 2-2.3 エッジ(edge)抽出

画像中に人物が存在する場合、物体と背景の境目は輝度値が急激に変化する。この境目をエッジ(edge)と呼び、このエッジを画像から検出することで、二値画像を物体の幾何学的特徴のみが保持された図3のような線画像に変換することができる。エッジ抽出により顔の形状情報を活用して表情認識することが可能になり、認識率の向上が期待される。



図 3.エッジ抽出を行った画像例

隣り合う画素の輝度値の差をとることでエッジ抽出を行うことができる。隣り合う画素の輝度値の差は、連続関数における微分と同じ考えが成り立つ。この微分をフィルタ化した微分フィルタには様々なものがあるが、二次微分によりエッジを抽出するラプラシアンフィルタ[5]を本研究では用いた。二次微分は一次微分をした結果にもう一度一次微分を行えばよく、一次微分フィルタ同士の差分を求めることと同じである。ラプラシアンフィルタの設計方法を図4に示す。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

図 4. ラプラシアンフィルタの設計方法

### 2-2.3 サポートベクトルマシンを用いた 2 クラス分類

本研究の目的である「画像中の人物が笑顔かどうかを自動でコンピュータに判別させる」とはすなわち、「画像データが“笑顔”と“笑顔以外”の2つのカテゴリーのどちらに属するか識別する」ことであり、これは 2 クラス分類問題と呼ばれる問題である。画像データの属するカテゴリー（クラス）を推定する処理を行う部分を分類器(classifier)と呼ぶ。画像の判別方法をコンピュータに学習してもらうための訓練データから分類のために獲得・抽出した「規則」に基づいて、分類器を構築することで、画像に対して笑顔かどうかを推定させることが可能になる。

サポートベクトルマシン(SVM)[6]は教師あり機械学習のパターン識別手法の1つである。2 クラス分類問題において代表的な手法であり、未知データを 2 クラスに分ける精度が高い分類器(関数)の構築に優れている。サポートベクトルマシンの特徴はマージン最大化である。分類器によって形成される2つのクラスを分ける境界を分類境界と呼び、分類境界を挟んで2つのクラスがどのくらい離れているかをマージンと呼ぶ。マージン最大化とは図Aのようになるべく大きな分類境界を求めることである。図Bのようにマージンが小さすぎると分類境界がギリギリのため、学習データ以外の未知データにおいては判別に失敗する可

能性が高い。マージン最大化によって、コンピュータは学習データ以外においても高い判別精度を示すことが期待できる。

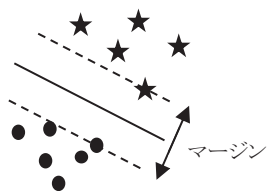


図 A マージン大

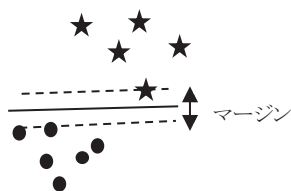


図 B マージン小

サポートベクトルマシンを python のモジュール scikit-learn によって実装した。笑顔の画像と笑顔以外の表情の画像にそれぞれラベル付けを行い、教師データとしてサポートベクトルマシンで学習させた。学習後、様々な表情の画像が混ざった未知データにおいて、画像が笑顔の画像か笑顔以外の表情の画像かそうでないかを判別させ、適合率・再現率・F 値を求めた。

### 3. 結果

#### 3-1. 二値化処理結果

判別分析法を用いた二値化により、図 5 のような画像中の顔領域が白く、背景が黒くなるような二値化画像を作成できた。一方で図 6 のように画像全体が白くなり、顔領域と背景が判別できない画像、また図 7,8 のように表情認識において重要な顔領域が一部あるいは完全に黒くなってしまった画像も存在した。



図 5. 二値画像(閾値 113)



図 6. 二値画像(閾値 171)



図 7. 二値画像(閾値 96)



図 8. 二値画像(閾値 189)

#### 3-2. エッジ抽出の結果

判別分析法を用いて二値化した画像にエッジ抽出を行った結果、図 9 のような線画像が作成できた。笑顔の特徴となる口角のあがりやえくぼなどが抽出できた画像もあったが、図 10 のように検出したエッジが多すぎて、表情の幾何学的特徴がきちんと抽出されていない画像もあった。



図 9. エッジ抽出画像



図 10. エッジ抽出画像

### 3-3. サポートベクトルマシンによる判別結果

5000 枚を教師データとし、サポートベクトルマシンにより学習を行った。線形カーネルを用い、正則化パラメータ C を 5.0, 0.5, 0.1 に設定した。図 11 に二値化画像を用いた場合、図 12 にエッジ抽出画像を用いた場合のサポートベクトルマシンによる判別結果の適合率、再現率、F 値の出力値を示す。

C	クラス	適合率	再現率	F 値
5.0	笑顔	0.80	1.00	0.89
	その他	0.92	0.01	0.02
0.5	笑顔	0.80	1.00	0.89
	その他	1.00	0.00	0.00
0.1	笑顔	0.80	1.00	0.89
	その他	0.00	0.00	0.00

図 11. 二値化画像を用いたサポートベクトルマシンの判別結果

C	クラス	適合率	再現率	F 値
5.0	笑顔	0.80	1.00	0.89
	その他	0.90	0.01	0.02
0.5	笑顔	0.80	1.00	0.89
	その他	0.00	0.00	0.00
0.1	笑顔	0.80	1.00	0.89
	その他	0.00	0.00	0.00

図 11. エッジ抽出画像を用いたサポートベクトルマシンの判別結果

## 4. 考察

### 4-1. 二値化処理およびエッジ抽出結果の考察

判別分析法によって求めた閾値により二値化処理を行った結果、多くの画像で表情認識に用いるのにふさわしいと考えられる二値画像が得られた。一方で、グレー画像の段階から画像全体が明るいまたは暗いなど輝度ヒストグ

ラムに偏りがあると考えられる画像、あるいは顔領域と背景の輝度の差が小さすぎる画像などに対しては判別分析法により適した閾値が得られず、二値画像も表情認識には適さないと考えられる画像になってしまった。これらの画像に対しては判別分析法以外の別の方法により二値化することが望ましいと考えられる。

また、二値化の結果がエッジ抽出により作成される線画像にも大きな影響を与える。より適した閾値を用いた二値化により、エッジ抽出によって表情の幾何学的特徴がはっきりとしたエッジ抽出画像が作成できると考えられる。

### 4-2. サポートベクトルマシンによる判別結果の考察

図 10, 11 より、笑顔画像の判別に対しては正則化パラメータ C の値は影響しなかった。また適合率、再現率の結果から、笑顔の画像はすべて笑顔の画像として判別できたが、笑顔の画像として判別した画像の中には、笑顔以外の表情の画像も含まれていたことが分かった。

一方で笑顔以外の表情の画像の判別において、サポートベクトルマシンの正則化パラメータ C の値は二値画像を用いた場合は 0.5、エッジ抽出画像を用いた場合は 5.0 が適していると考えられる。

二値画像を用いた場合、またエッジ抽出画像を用いた場合のどちらにおいても、適合率の結果数値から、笑顔以外の表情の画像として判別した画像の正解率は 90~100 パーセントだった。しかし再現率の結果数値は極めて低く、笑顔以外の表情の画像の多くをとりこぼしてしまっことを意味している。

総合すると、線形カーネルを用いたサポートベクトルマシンによる判別では笑顔の画像と笑顔以外の表情の画像の判別が難しく、笑顔ではない画像を笑顔と判別してしまうことが多いようである。また、エッジ抽出画像を用いる場合のほうが二値画像を用いる場合よりも認



識精度が高いと予想していたが、判別結果はあまり変わらなかった。

ポートベクトルマシン』

## 5. まとめと今後の展望

今後は画像のデータ数を更に増やしたり、二値化画像やエッジ抽出画像だけでなく、様々な特徴量画像を用いたりして笑顔認識を行いたい。サポートベクトルマシンを用いた判別結果より、線形カーネルによる判別には限界が感じられたので、RBF カーネルを導入する必要があると考えられる。また笑顔かどうかだけでなく、怒りや悲しみなどのその他の顔を学習させ、人間の認識と比較したい。

## 6. 参考文献

- [1]工学院大学研究報告第 102 号, 平成 19 年 4 月, 木村裕美子, 中村納, 表情認識における特徴量抽出のための顔部位の変化に対応した特徴量抽出領域設定法の検討
- [2]工学院大学研究報告第 113 号, 平成 24 年 10 月, 石田貴正, 平野晃昭, 中村納, 表情認識のための顔部品の特定とその抽出
- [3] Challenges in Representation Learning: Facial Expression Recognition Challenge, International Conference on Machine Learning (ICML) 2013, 2013.  
<http://deeplearning.net/icml2013-workshop-competition>
- [4]電子通信学会誌, 1980 年 4 月, 大津展之, 判別および最小二乗規準に基づく自動しきい値選定法
- [5]オーム社, 平成 28 年 12 月 25 日, 堀越力, 森本正志, 三浦康之, 澤野弘明, 『画像工学』, P.54~56
- [6]講談社, 2015.8.7, 竹内一郎, 烏山昌幸, 『サ

# “洗濯機”の流れを考える

## ～軸対称回転流モデルの利用～

清水花音

### 要旨

“洗濯機”という、プール内を複数人で同じ方向へと動き、回転流を発生させる遊びにおいて、流れが止まるまでに要する時間を見積もる。軸対称回転流と Couette 流れを組み合わせた数理モデルを考え、この問題に取り組んだ。また、数理モデルと実際の流れとの整合性を調べるため、実際の流れと比較をする実験を行った。その結果、本研究で用いた軸対称回転流モデルは回転流が止まるまでの時間の見積もりに使うためには良いモデルであることが期待できる。

### 1. はじめに

プールの中で人々が一斉に、壁に沿って同じ方向へ動き、回転流をつくる“洗濯機”という遊びがある。“洗濯機”では、十分に動き回ることによって安定した回転流を生み出したのち、動くことをやめ、流される。このとき、回転流が止まるまでの時間はどのくらいなのだろうか、という疑問を持った。この問題を解決するため、軸対称回転流 (axisymmetric rotational flow) と Couette 流れを組み合わせた数理モデルを作り、回転流が止まるまでの時間を見積もった。また、本研究で扱った数理モデルの整合性について、実際の流れと比較することにより、考察を行う。

### 2. 研究方法

#### 2-1. 軸対称回転流モデル

本研究において、考える対象の単純化のため、“洗濯機”を円筒状のプールで行っているものとし、動いている人をたんに動く壁であるとみなす。“洗濯機”の流れを近似する数理モデルとして、軸対称回転流モデルを導入する。本研究で用いる軸対称回転流モデルは、以下のような【仮定】の下に構成されているものとする。

#### 【仮定】

- (i) 初期状態では定常の軸対称な回転流が生じている
- (ii) 流れは粘性の効果によって止まる
- (iii) 半径方向の速度分布は、常に直線的である
- (iv) Reynolds 数 (以下  $Re$  と表記) について、 $Re \ll 1$  であり、慣性力を無視できる
- (v) 流れている流体は非圧縮性である

仮定 (iv) について、 $Re$  とは、慣性力と粘性力の比を表す無次元量で、 $Re = U\rho L/\mu$  で定義されている。ただし、 $U$  は代表速度、 $\rho$  は流体の密度、 $L$  は代表長さ、 $\mu$  は粘性率である。ところで、慣性力は  $\sim \rho \frac{U}{L}$ 、粘性力は  $\sim \frac{\mu}{L}$  と評価できる。 $Re$  の定義から、

[慣性力]/[粘性力] として比を取るとき、 $Re \ll 1$  ならば [慣性力]  $\ll$  [粘性力] であり、慣性力は粘性力よりもきわめて小さいので、無視して考えても問題ない。

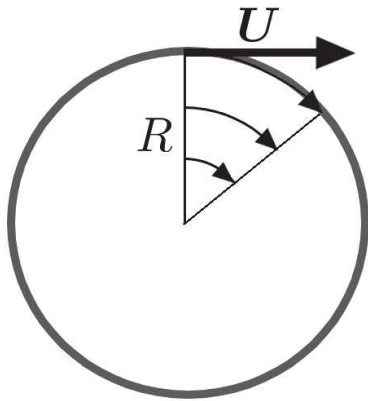


図 1. 軸対称回転流モデル

## 2-2. 軸対称回転流モデルにおける速度分布

軸対称回転流モデルで扱う流れは、壁の速度によって流れが生じている粘性流であるといえる。このような流れに近い流れに、Couette 流れがある。

### 2-2-1. 平面 Couette 流れ

図 2 のような、2 枚の平行な板の間にはさまれた流体の流れを考える。上の壁と下の壁が互いに異なる速度で平行な向きに移動し、流体の任意の 2 点間での圧力の変化率を表す圧力勾配が 0 であるときに生じる流れ(ただし、流体の運動が規則的である層流の状態とする)を Couette 流れ (Couette flow) という。

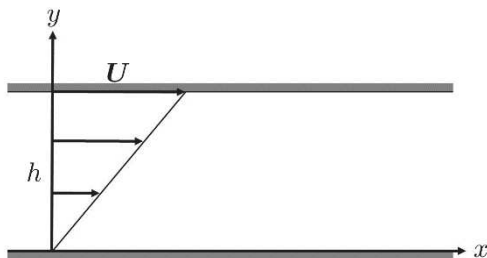


図 2. Couette 流れ

Couette 流れにおける速度分布は、直線分布になることが知られている。一般に、速度分布は以下の式で与えられる。

$$u = \frac{U}{h}y \quad (2.1)$$

ただし、 $U$ は上の壁の速度、 $h$ は上下の壁の距離である。

Couette 流れと同様に、軸対称回転流モデルにおける速度分布を考える。半径方向について、(2.1)式より、

$$v_{\theta} = \frac{U}{R}r \quad (2.2)$$

であり、円周方向について、軸対称な系を考えているから

$$v_r = 0 \quad (2.3)$$

であると考えられる。ただし、 $U$ は壁を動かす速度、 $R$ は軸から壁までの距離である。

### 2-2-2. 平面極座標表示の基礎方程式

非圧縮性流体における基礎方程式は、Navier-Stokes 方程式と連続の式(equation of continuity)である。これらを平面極座標表示したものを以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_r - \frac{v_{\theta}^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_{\theta} - \frac{v_r v_{\theta}}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta v_{\theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.6)$$

$r$ は軸からの距離、 $\theta$ は角度、 $\rho$ は流体の密度、 $v_r$ は半径方向の流速、 $v_{\theta}$ は円周方向の流速である。(2.4)式は $r$ について、(2.5)式は $\theta$ についての Navier-Stokes 方程式、(2.6)は連続の式である。

2-1.の【仮定】(iv)より、Navier-Stokes 方程式の慣性項を無視し、近似を行う。これを Stokes 近似という。Stokes 近似、極座標表示の Navier-Stokes 方程式から、(2.2)式、(2.3)式によって与えられる軸対称回転流エネルギーの速度



分布が基礎方程式をみたすかどうか確認する.

$r$ についての Navier-Stokes 方程式より,  

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_r - \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$
 定常流という仮定と Stokes 近似の適用, 流速は  $\theta$  に依存しないことにより,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\therefore 0 = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.7)$$

$\theta$  についての Navier-Stokes 方程式より,  

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) v_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

$r$ についての場合と同様の操作により,

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (2.8)$$

が得られる.

(2.7)式, (2.8)式から  $p$  の消去を考える.

両辺を  $r$  で微分する.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)$$

(2.7)式より,

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (2.9)$$

ここで,  $v_\theta$  について,  $v_\theta = \frac{U}{R} r$  を代入すると,

(右辺) = 0

が成立し,  $v_\theta = \frac{U}{R} r$  は (2.9)式をみたす解である

ことがわかる. また, 境界について,

$$v_\theta = 0|_{r=0}, \quad v_\theta = U|_{r=R}$$

であり, これらは(2.9)式をみたす.

## 2-3. 粘性散逸による回転流の消失

微小な流体要素を考えたとき, 流体要素における単位時間あたりの正味のエネルギー変化を  $\Delta E$  とおくと,

$$\Delta E = \frac{\partial}{\partial r} (u\tau)$$

で与えられる. ただし,  $\tau$  は粘性応力で,

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \mu \frac{U}{R} \quad (2.10)$$

である. これより, ある  $r$  における単位時間あたりの粘性散逸は,

$$\Delta E = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U}{R} r \cdot \mu \frac{U}{R} \right)$$

$$= \mu \left( \frac{U}{R} \right)^2$$

である. また, 半径方向での単位時間あたりの粘性散逸の総和は,

$$\int_R^0 \mu \left( \frac{U}{R} \right)^2 dr = \mu \frac{U^2}{R}$$

であり, 系全体での粘性散逸の総和  $E$  は, 壁を閉曲線  $C$  として,

$$E = \oint_C \mu \frac{U^2}{R} dr = 2\pi\mu U^2 \quad (2.11)$$

である.

## 2-4. 流体の運動エネルギー

軸対称回転流モデルにおける運動エネルギーを  $K$  と置くと, 半径方向の運動エネルギーは,

$$K = \int \frac{1}{2} \rho u^2 dV = \int_0^R \frac{1}{2} \rho u^2 dr$$

$$= \int_0^R \frac{1}{2} \rho \left( \frac{U}{R} r \right)^2 dr$$

$$= \frac{1}{6} \rho U^2 R$$

である. また, 系全体での運動エネルギー  $K_1$  は,

$$K_1 = \oint_C \frac{1}{6} \rho U^2 R dR$$

$$= \frac{1}{3} \pi \rho U^2 R^2$$

ここで, 定常な回転流が生じている, 初期状態の運動エネルギーを  $K_0$  とすると,

$$K_0 = \frac{1}{3}\pi\rho U^2 R^2 \quad (2.12)$$

である。

## 2-5. 回転流が消失するまでの時間

以上のモデルと、現実の流れとの整合性を考える。粘性により、運動エネルギー $K_0$ は時間 $T_0$ 後に、全て温度上昇等に変換され、散逸するとする。また、回転流が減衰する間も単位時間当たりの粘性散逸は $2\pi\mu U^2$ を取り続けるものとする。このとき、定常な回転流が発生している、初期状態の流れが持つ運動エネルギーは、単位時間当たりの粘性散逸の総和と等しくなると考えた。おおよそ $T_0$ は以下のように見積もることができるだろう。

$$T_0 = \frac{\text{初期状態の流体の持つ運動エネルギー}}{\text{単位時間当たりの粘性散逸}} \quad (2.13)$$

つまり、

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{K_0}{E} = \frac{\pi\rho U^2 R^2 / 3}{2\pi\mu U^2} \\ &= \frac{\rho R^2}{6\mu} \end{aligned}$$

これより、時間 $T_0$ は密度 $\rho$ 、軸と壁の距離 $R$ 、粘性率 $\mu$ に依存しているが、壁の速度 $U$ には依存しないことが予想される。

壁の速度 $U$ に依存しない理由として、 $\rho$ 、 $R$ 、 $\mu$ は変化しないとき、(2.10)式より、粘性応力 $\tau$ は $U$ に依存する。 $U$ により押し流される力と粘性応力 $\tau$ は打ち消しあうため、 $U$ が変化しても $T_0$ には影響しないということが考えられる。

## 2-6. 実験

ここまで、 $Re \ll 1$ という仮定をみたしているときの議論を行ってきた。しかし、このような流れはほとんど存在しない。ここで、 $Re$ が1を超えているときであっても、軸対称回転流モデルは、回転流が止まるまでの時間の見積もりに有用であるかどうか調べる。壁の速度によって軸対称回転流を生じさせる装置を作り、回転流が止まるまでの時間の計

測を行う。

2-5. より、回転流が消失するまでの時間 $T_0$ は壁を動かす速度に依存しないことが予想される。これが正しいならば、モーターの回転速度を変化させたとき、 $T_0$ はおおよそ一定であると考えられる。

### 2-6-1. 準備物

DC モーター(FA-130RA)、4速クランクギヤーボックスセット(楽しい工作シリーズ NO.110)、アルミ板(0.5mm)、アクリル板(t:3mm)、ビス(M3, PC)、デコレーションケーキ丸型(5号)、タッパー、スタyroフォーム(高さ調節用)、電源装置、スタンド、防振ゴムシート、ガラスビーズ

### 2-6-2. 実験装置

以下のような回転槽を製作した。

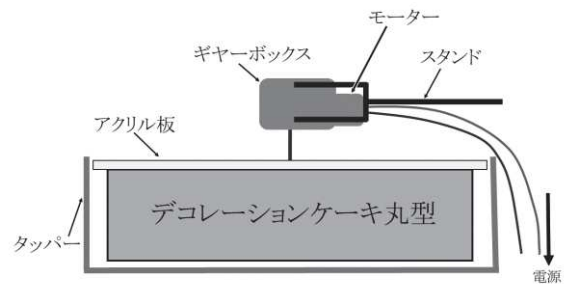


図3. 実験装置

### 2-6-3. 実験方法

モーターの回転する速度を変化させ、壁の速度と時間との間に依存関係があるか確認する。モーターに与える電圧が1.5V、3Vの場合について実験を行った。なお、ギヤー比は126:1である。実験手順は以下の通りである。

- (1) 5分間、モーターを回転させ、定常な回転流を作る。
- (2) 直ちにモーターの回転を止め、回転流が止まるまでの時間を計測する。
- (3) 実験の様子は動画で記録し、モーターを停止してから流れが止まるまでの時間を動画から確認する。

### 3. 実験結果

回転流が止まるまでにかかった時間は以下の通りであった。(単位:秒)

1.5V	3V
843	143
209	711
738	268
222	320
118	363

また、回転槽の壁の速度を代表速度として、 $Re$ を求めたところ、おおよそ $10^5 \sim 10^6$ のオーダーであった。しかしながら、明らかに[回転槽の壁の速度]  $\ll$  [回転槽内部の流速]となっているため、評価すべき $Re$ はこれより小さいだろう。

### 4. 考察

本研究で扱った軸対称回転流では、問題の単純化のため、回転流が減衰している間の速度分布も直線的であるものとして、回転流が止まるまでの時間を見積もり、 $T_h$ は $U$ に依存しないと予想していた。実験結果より、壁の速度と回転流が止まるまでに要する時間との間の依存関係は認められなかった。これより、近似の都合上、本来は軸対称回転流モデルは $Re$ が1よりもきわめて小さい場合にしか適用できないが、回転流が止まるまでの時間を見積もる場合においては $Re$ が1を超えている場合にも適用できると考えられる。

しかしながら、本実験で得られたデータにはばらつきが多いため、軸対称回転流モデルは $Re$ が1を超えている場合にも適用することができる、と結論付けることはできない。データのばらつきの原因として、

- (1)実験装置周りの気流による影響
- (2)振動による影響
- (3)  $Re$ が高い流れであることが挙げられる。

(1), (2)については、実験環境の改善が必要で、  
・実験装置の周りに人がいないようにする

・実験装置周りに壁を作る

ということが有効であると考えられる。

(3)について、回転流を作るためにモーターの速度を上げたため、 $Re$ の高い流れが生じた。 $Re$ の高い、乱流状態では流体は複雑な挙動をとるため、本実験のデータのばらつきが生じたと考えられる。

### 5. 今後の展望

本研究における実験では、回転流が止まるまでの時間と、与える流速との依存関係しか確認できなかった。異なる粘性や密度の流体、異なるスケールでの実験を行いたい。また、速度について、2パターンしか調べられておらず、議論が不十分であるため、引き続き同様の実験を繰り返したい。

本研究では軸対称回転流を扱ったが、“洗濯機”はふつう、直方体のプールで行われる。このとき、軸対称回転流よりも複雑で、手計算では扱えない。洗濯機のように四角い領域についても考えるには数値計算が必要である。以前に数値計算を行った、Cavity flowの境界条件を変更すれば、“洗濯機”における流れの様子を調べることができると考えている。

### 6. 謝辞

本研究を進めるにあたり、丸石 崇史さん(京都大学 流体物理学研究室 M1)には流体力学の理論について教えていただき、また、共に議論をしていただきました。深く御礼申し上げます。

### 7. 参考文献

今井 功, 1970, 流体力学(物理テキストシリーズ 9). 岩波書店, 194-195

今井 功, 1973, 流体力学(前編)(物理学選書 (14)). 裳華房, 278-279, 402

アズワン, 2016, 純水の粘度、動粘度および密度.  
<https://www.as-1.co.jp/academy/24/24-2.html>

# 超音波による雨粒の除去

## ～ワイパーに代わる超音波のポテンシャル～

高木恒佑

### 要旨

現在、乗り物に一般的に使われているワイパーの代わりに、超音波を使って雨粒を除去するという技術が注目されている。本研究では、雨粒を含む粒子状の物質に超音波がどのように作用するかを実験し、超音波を用いた雨粒除去の現実的な方法について考察した。

### 1. はじめに

音波というものは粗密波であるため空気に密度のムラが生じてしまう。そしてその部分で圧力にも差が生じる。そこで空気はそのムラをなくすために移動しようとするその流れに押されて物質は浮いている。

今回の研究ではこの超音波浮揚が重要になる。

### 2. 材料

- ・超指向性超音波スピーカー  
(周波数 41 k Hz, 12V アダプターを使用)
- ・アクリルガラス
- ・発泡スチロール
- ・真球樹脂
- ・スポイト
- ・水
- ・ガラコ (撥水液)  
会社名：ソフト 99

### 3. 実験方法

①超音波浮揚を確かめるために密度が非常に低い発泡スチロール  $0.015 \text{ g/cm}^3$  を用いて浮かせてみた。(写真①)

②超音波洗浄機を用いて水をそこへ投入し様子を調べた。(写真②)

③次に密度を水に近づけていくために真球樹

脂という密度が約 1.0 でまた大きさは雨粒の大きさである 0.5mm 使用し浮揚するか実験した。

④真球樹脂の落下地点で真球樹脂は筋状になっていた。(写真③) また落下する様子を調べた。

※樹脂が筋状になりこの筋の間隔を求めることで周波数が求まる。

この場合は間隔が 0.45 cm であるから波長はその 2 倍で 0.9 cm。

この時の気温は 18 度であるため音速の公式

$$V = 331.5 + 0.6 t$$

に代入する

$$V = 342.3 \text{ となり}$$

また音速 = 周波数 × 波長に代入すると周波数は約 38000 Hz であることが分かった。

⑤反射板をつけてその角度を変えながら真球樹脂の様子を調べた。(写真④)

⑥水滴をたらし雨の環境に近づけ、その水滴の様子を観察した。

⑦フロントガラスにどのように超音波発生装置をつければ雨水を除去できるか推測する。

#### 4. 結果

①超音波発生装置に写真のような小さい発泡スチロールは浮かせられることが確認できた。

②水は下の振動子から発生している超音波に影響されて霧（しぶき）を生じた。

③真球樹脂は超指向性超音波スピーカーによって浮かせることはできなかった。落下する様子を調べてみると超音波を生じさせたときにはカーテン状になりながら落下した。

④落下した後に真球樹脂はたくさんの筋状に分かれていた。このことから超音波の周波数を求められる。

⑤反射板をつけてその角度を変えると同時に音波の位相が変化するために真球樹脂は筋状を維持しながら動いた。（図①）

⑥⑤での真球樹脂を水滴に代えて同様に実験を行ってみた。このときガラスには撥水コーティングを施している。水滴は真球樹脂とは異なり動くことはなかったが水滴上部が少し揺れていた。

この時の水滴のサイズは雨粒の範囲である約0.5mmから1.0mmである。

#### 5. 考察

・発泡スチロールは浮かせることはできたが真球樹脂は浮かなかった。密度が浮くか否かに関係しているといえる。

・水のしぶきが生じたことから超音波で水を空中に浮かせることができたのでこれを風圧に加えると水滴の除去につながるように考えられる。

・反射板をつけて実験した際には反射板の角度

を変えると同時に真球樹脂が動いたことからこれを活用すると水滴の除去につながると推測する。また水滴で行った時も動きはしなかったが影響を受けているということは分かったので出力を上げると水滴も真球樹脂と同様な現象が得られると考える

・そしてこれらの実験を踏まえてどのようにすればワイパーの代わりに果たせるかを考えてみると撥水コーティングされたフロントガラスの左右に強い出力の超指向性超音波スピーカーを装備させ可動の反射板をつけることで降ってきた雨を上へと押し上げていく。さらに超音波によって雨は霧状になるはずであるから風圧によって除去されていくと考えられる。

#### 6. 展望

出力をあげると水滴は動くと思われるのでまず実験での出力を上げて調べる。また推測したものを実際に模型のような形で実験を行いそれから反射板のつけ方などを探り、より効率の良さを求めていく。

#### 7. 参考文献

<http://car-me.jp/articles/4029>

谷腰欣司, 谷村康, 2015, 超音波の本



## 8. 添付資料

写真①



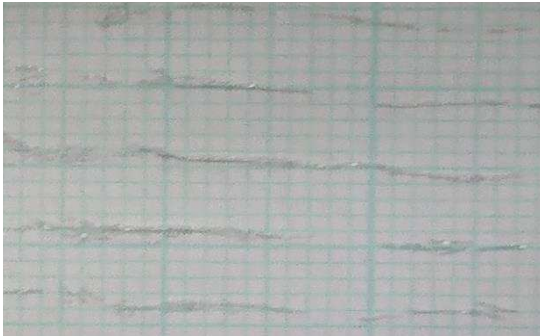
超音波浮揚で浮く発泡スチロールの様子

写真②



超音波によってしぶきを上げる水の様子

写真③



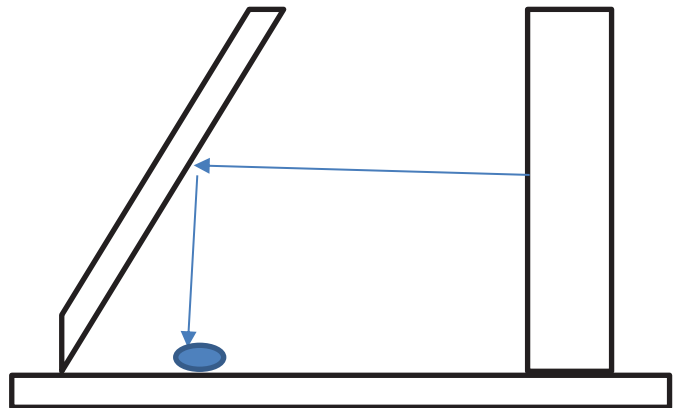
超音波で筋状になった真球樹脂

写真④



反射板を付けた超指向性超音波スピーカー

図①



↑  
超指向性超音波スピーカー

# 成長する AI

## ～ 重力付き四目並べにおける盤面評価の違いによる AI の挙動の変化 ～

尾上礼音

### 要旨

盤面評価の方法、データの質の違いによる AI の挙動並びに勝率の変化を探ることで、AI の挙動、強さをある程度任意に指定できるようになるのではないかと考え、棋譜データを用いる評価法と、盤面自体を評価する方法を用いて実験を行った。その結果、評価方法の違いによる勝率の上昇や、次の指し手が統一される盤面があること、つまり AI が定石を作ったことを確認した、今後さらに細かく研究していくことで戦法の傾向や、強さを操作することも実現できるのではないかと予想を得た。

### 1. はじめに

今回研究に用いる重力付き四目並べ(以下 Connect4)は縦6横7の盤上で、打った手が重力により一番下まで落ちる四目並べで、すべての盤面での最善手がすでに解明されており、最善手を続ければ先手が必ず勝つゲームである。(しかし今回はそれを用いていない。)

本研究の目的は盤面評価の方法や質の違いによって AI の挙動、勝率がどう変わるのか、を探ることであり、パソコンの処理能力と必要である盤面データの量から考えて、次の手として打つことのできる手が少なく、管理しやすいこのゲームを採用した。

の AI を作成する際に、棋譜データとの照合や、盤面の状況を判断する評価方法を用いて作成し、他の Connect4 の AI (今回はアプリを使用した) と対戦させた挙動、勝率より考察する。

今回用意した棋譜データは少なかつたため、挙動に一貫性が出るとすれば序盤であり、また、勝率には大きな差が出ず、対戦で勝利することはほぼないのではないかと考え、今回の研究では AI の挙動、強さを操作するにはあまり有用なデータとならないだろうと仮説を立てた。

結論として、勝率は評価法の変化によって上

昇し、序盤だけではあるが、挙動も固定化される傾向にあった。

### 2. 材料・研究方法

#### 2-1. 研究試料

・パソコン(ThinkPad X220)

Unity 5.5.2, copyright © unity3d.com.  
(Connect4 および AI を作成するために使用した、言語は C#を用いた。)

・4 in a Row version1.3.6 copyright © 2011 Ultima Architect Inc.(今回作成する AI と対戦させた。)

・棋譜データ(各盤面と勝率を保存したもの)

#### 2-2. 研究方法

・ Connect4 のゲームを Unity で作成した。

・ すべてランダムに次の手を決めさせ、アプリ定義のレベル 1～5 と各 10 戦ずつ対戦させた。

3. 他の対戦時の棋譜データを用いて(今回は 20 戦分、その盤面と真ん中の列を軸として左右対称な盤面は、同じデータと考えられるので、20 戦分の盤面の左右対称である盤面データ、合わせて約 40 戦分、盤面データにして、約 1000 盤面分のデータを用いた)今の盤面より 1 手分進めた手と照合して、合致するものがあれば、その時の勝

率をもとに次の手を決定させ(合致するものがなければランダムに.), 2と同じく各 10 戦ずつ対戦させた. …①

4. 3に加え, 次の手で4つ石が並ぶ場合のみ, 確実にその手を打たせ(盤面自体の評価), 1, 2と同じく対戦させた. …②

## 結果

2-2 の研究方法の 2 で行ったすべてランダムの場合, まれに序盤は良い手が続くこともあったが, すべてのレベルで一度も勝てない結果となった.

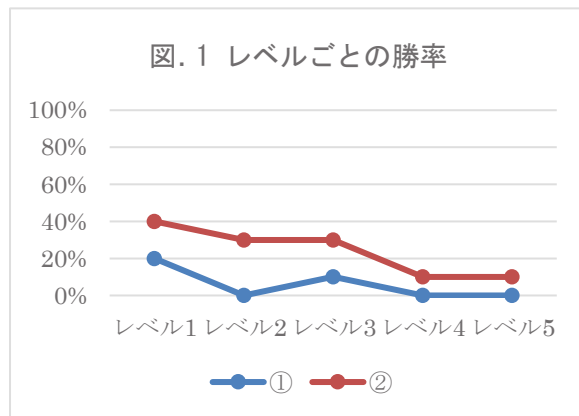


図. 1 を見ればわかるようにレベルが上がるにつれて勝率が落ちる傾向にあり, すべてのレベルにおいて, ②の勝率が高くなる, といった結果となった.

①においては, 次の手で4つ並ぶ盤面であっても, 別の手を選択することが多かった.

また, ①においても②においても序盤の指し手が固定化されているような傾向にあり, 特に先手の場合には, 真ん中以外の列には一度も打たなかった. また, 相手が次の手で4つ並べるができる状況でも, それを防ぐことができなかった.

## 4. 考察

すべてランダムの場合, 打ちうる手は最大 7 通り, すべてが正しい手でない限り, ランダムに打った手が正しい手であり続ける可能性は非常に低いものと考えられる, 一度も勝てないの

は当然の結果とも考えられる.

①, ②において, レベルが上がるにつれて勝率が落ちる傾向にあるのは当然のことであり, ①よりも, ②のほうの勝率が高かったのは, ②で追加した機能で①で見受けられた, 次の手で4つ並ぶ盤面であっても, 別の手を選択することが多かった. という事象を補助するものであったからと考えられる.

①においても②においても序盤の指し手が固定化されているような傾向にあり, 特に先手の場合には, 真ん中以外の列には一度も打たなかったのは, 棋譜データの上で, その盤面での勝率が他の盤面より高かったから. 相手が次の手で4つ並べるができる状況でも, それを防ぐことができなかったのは, そのような機能を設けなかったからだと考えられる.

全体として勝率が低かったのは, 前述のような相手の勝利を防ぐことができなかったことや, 棋譜データが完全でなかった, 数が少なかったことが原因だと考えられる.

また, ①で用いた盤面データと照合して次の手を評価する方法の場合, データが存在しない場合, つまり例外に弱い傾向にあると考えられる. 今回の研究で序盤に一貫性があったのも, 逆に考えれば中盤以降は例外の連続で, ランダムに打っていたにすぎないと考えられる. さらに, 次に勝利できる状況にあっても, 過去の盤面データと一致するものでなければ結局ランダムに打つことになる. これは, 相手が次の手で勝利するのを, 防ぐことができなかったことにもいえることである. 以上より過去の盤面データと照合して次の手を決める評価方法を用いた AI は, 対局全体のみを評価していて局所的な部分は評価していないため, 次に勝つ盤面や, 次に負ける盤面でも過去のデータに存在しない盤面であれば正しい手を選択することができない. 言い換えると, 特定条件下で選択すべき手というものを学習しにくいものであると考えられる.

②において追加した, 盤面の状況を評価する



方法の場合、現在は評価の基準を完全にこちら側が指定してやる必要がある、例えばポイントを付けて、次の手を決める指標にするとすれば、自分の駒がいくつ並んでいるときに何ポイント、というようなものを全て決める必要がある。次の手で必ず勝つ場合であったり、次の相手の手で負ける場合であったりならば、次に打つべき手はほぼ確定するが、そうでない場合は、こちらが指定する評価値によって大きく挙動、勝率が変化すると考えられる。つまり、Connect4 をよく理解していない状況では、優先的に用いるべきではない評価方法であると考えられる。

よって、少なくとも現状では、過去の盤面データと照合して評価するものと、盤面状況の評価する方法の二つを、場面によってうまく使い分けることが最善であり、今後研究が進み、盤面と勝率の関係性を見出していくにつれて、盤面の状況の評価する際の評価値に適した値を探っていくことがよいのではないかと考えられる。

今回の研究では、仮設より良いデータが取れ、序盤の指し手が固定化されていることや、①から②のわずかな勝率の変化をみると、評価法や、使用するデータの使い方を調整し、変え、応用していくことで、目的である AI の挙動、強さの操作を実現することができるのではないかと考えられる。

## 5. まとめと今後の課題

今回の研究から、さらに細かく研究していくことで AI の挙動、強さの操作を実現することができるのではないかと考えられる。

AI の挙動を操作できるということは、使用する棋譜データのある特定の人物のデータのみを使用することで、「〇〇風 AI」を作成することも可能なのではないかと考えられる。

し、AI にとっての例外を減らしたり、相手が次の手で勝利するのを防ぐ機能を作成したりして、さらに細かく研究し、データを取り、ゆくゆくは、さらに発展した評価方法を用いて、さらに有用なデータを取るために勝率や挙動の変化を見ていきたいと

考える。

## 6. 参考文献

Pascal Pons, Connect four solver,  
<http://connect4.gamesolver.org/?pos=>