洛北算額　先月の解答・解説

2022 年 3 月の問題

2つの関数 $f(x)$ と$g(x)$について、$f(g(x))$という関数を考えることがあります。
たとえば$f(x) = x^2 + 2x + 3$，$g(x) = x^2 + 4x + 5$の場合は

$$\begin{aligned} f\left(g(x)\right) &= \{g(x)\}^2 + 2g(x) + 3 \\ &= (x^2 + 4x + 5)^2 + 2(x^2 + 4x + 5) + 3 \\ &= x^4 + 8x + 28x + 48x + 38 \end{aligned}$$

です。次の問いに答えてください。

（1）
2つの2次関数$f(x)$と$g(x)$をうまく選んで、
方程式 $f\left(g(x)\right) = 0$ の解が$x = 1, 2, 3, 4$ となるようにしてください。

（2）
3つの2次関数$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$をどのように選んでも、
方程式 $f\left(g(h(x))\right) = 0$ の解は $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ にはならないことを証明してください。

（3）
3つの2次関数$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$をうまく選んで、
方程式 $f\left(g(h(x))\right) = 0$ が8つの異なる自然数解を持ち、その和が最小になるようにしてください。

解説

$f(g(x))$は合成関数といって数学 III の内容ですが、そこまで難しいわけではなく、どちらかといえば数学 II の「複素数と方程式」に関連する問題でした。

(1)　$f(x)$と$g(x)$が二次関数なら、$f(g(x))$は四次関数です。$x=1,2,3,4$を解とする四次方程式は

$$a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$$

以外にはありません（aは定数）。$f(x)$を 2 倍，3 倍，⋯ すると$f(g(x))$も 2 倍，3 倍，⋯になるので、$f(x)$のかわりに$\frac{1}{a}f(x)$を考えることで$a=1$であるとしてよいです。

したがって問題は「$f\left(g(x)\right)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$となる二次関数$f(x),g(x)$があるか？」になります。右辺を計算すると

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)&=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}\\&=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)\\&=\{(x^2-5x)+4\}\{(x^2-5x)+6\}\\&=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24\end{aligned}$$

となるので、$f(x)=x^2+10x+24,\ g(x)=(x^2-5x)$とすれば

$$f\left(g(x)\right)=g(x)^2+10g(x)+24=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

であり、目的のものがみつかりました。

ここで、答えは他にもあることに注意してください。
例えば$g(x)=x^2-5x+4$とすることもできて、その場合は$f(x)=x^2+2x$になります。様々な答えが考えられますが、結局のところ$f(x)=(x+a)(x+a+2),\ g(x)=x^2-5x+4-a$の形になるはずです。

(2)

(1)と同様の考察をすると、(2)は次のような問題と言い換えられます。

問題(2)の言い換え

$$f\left(g(h(x))\right)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$$

となる二次関数$f(x),g(x),h(x)$があるか？

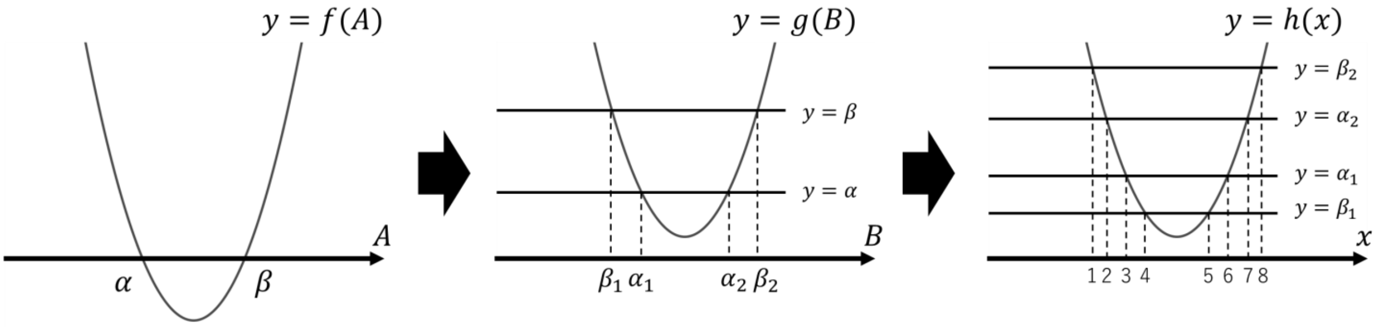
(1)では、$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$を$(x-1)(x-4)$と$(x-2)(x-3)$にわけて展開することでx^2-5xという重要なパーツをみつけることができました。(2)ではどうでしょう？

ひとまず(1)と同様に端から順にペアにしていくと

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)\\
&\quad=\{(x-1)(x-8)\}\{(x-2)(x-7)\}\{(x-3)(x-6)\}\{(x-4)(x-5)\}\\
&\quad=(x^2-9x+8)(x^2-9x+14)(x^2-9x+18)(x^2-9x+20) \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}
$$

x^2-9xをBとおくと$(B+8)(B+14)(B+18)(B+20)$となりここからさらに（1）と同様の操作をしたいのですが、どのような組み合わせでもうまくいきません。x^2-9x+8など別のものをBとおいてもダメだし、実は別の方法でもうまくいきません。証明してみましょう。

- $g\big(h(x)\big)=A$とおくと方程式$f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)=0$ は $g(A)=0$となり、これはAについての２次方程式であるから解を２つもつ。解を$A=\alpha,\beta$（$\alpha\leqq\beta$）とする。
- $h(x)=B$とおくと、方程式$f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)=0$は「$g(B)=\alpha$または$g(B)=\beta$」となる。これは$B$についての２次方程式であるから解を２つずつもつ。それぞれの解を$B=\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$（$\beta_1\leqq\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\beta_2$）とする。
- $h(x)=ax^2+bx+c$（つまり$B=ax^2+bx^2+c$）とおくと、方程式$f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)=0$は「$ax^2+bx+c=\beta_1$」「$ax^2+bx+c=\alpha_1$」「$ax^2+bx+c=\alpha_2$」「$ax^2+bx+c=\beta_2$」の４つの２次方程式に分解できて、二次関数のグラフが線対称であることから、条件を満たす$f(x),g(x),h(x)$が存在すれば、それぞれの解が「$x=4,5$」「$x=3,6$」「$x=2,7$」「$x=1,8$」となる。



- これまでの話を総合すると、

$$h(1)=h(8)=\beta_2 \quad \cdots\cdots①$$
$$h(2)=h(7)=\alpha_2 \quad \cdots\cdots②$$
$$h(3)=h(6)=\alpha_1 \quad \cdots\cdots③$$
$$h(4)=h(5)=\beta_1 \quad \cdots\cdots④$$

となる実数$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$があり、二次関数$y=g(B)$が線対称であることから

$$\alpha_1-\beta_1=\beta_2-\alpha_2 \quad \cdots\cdots⑤$$

である。

- ⑤から$h(3)-h(4)=h(1)-h(2)$であり、さらに$h(x)=ax^2+bx+c$から

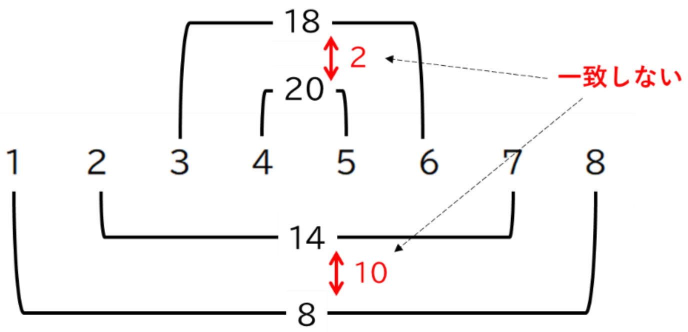
$$(9a+3b+c)-(16a+4b+c)=(a+b+c)-(4a+2b+c)$$

となり、整理すると$a=0$となる。これは$h(x)$が二次関数であることに矛盾する。

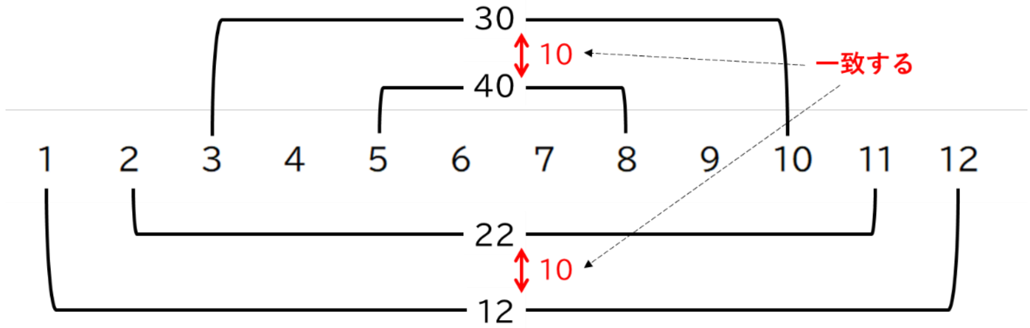
ちょっと長くなりましたが、言っていることはシンプルです。つまり前ページの最初の式（＊）に出てくる数「8, 14, 18, 20」が線対称にならんでいないといけないのですね。ここに対称性がないせいで、二次関数 g(x)のもつ対称性に矛盾するのです。けっこうおもしろい問題ではないでしょうか。

(3)

１から８を並べるのでは、積を線対称にできませんでした。



したがって、１から９を並べる、１から 10 を並べる、…と順に試していってうまくいく場所をさがします。今回は１～１２でうまくいきました。



実際、$f(x)=x^2+1140x+316800$，$g(x)=x^2+52x$，$h(x)=x^2-13x$とすると

$$
\begin{aligned}
f\left(g\left(h(x)\right)\right)&=\left\{g\left(h(x)\right)\right\}^2+1140g\left(h(x)\right)+316800\\
&=\left(g\left(h(x)\right)+480\right)\left(g\left(h(x)\right)+660\right)\\
&=(h(x)^2+52h(x)+480)(h(x)^2+52h(x)+660)\\
&=(h(x)+12)(h(x)+40)(h(x)+22)(h(x)+30)\\
&=(x^2-13x+12)(x^2-13x+40)(x^2-13x+22)(x^2-13x+30)\\
&=(x-1)(x-12)(x-5)(x-8)(x-2)(x-11)(x-3)(x-10)
\end{aligned}
$$

となり、解は$x=1,2,3,5,8,10,11,12$です（これが最小）。

これまで様々な問題をだしてきましたが、洛北高校の SSH 指定（第４期→第５期）にともない内容を改変するため、いったん出題を停止しようと思います。これからも不定期に問題を出したりしたいところですが、どうなるかはわかりません。解答の送付などご協力いただいた方々、ありがとうございました。