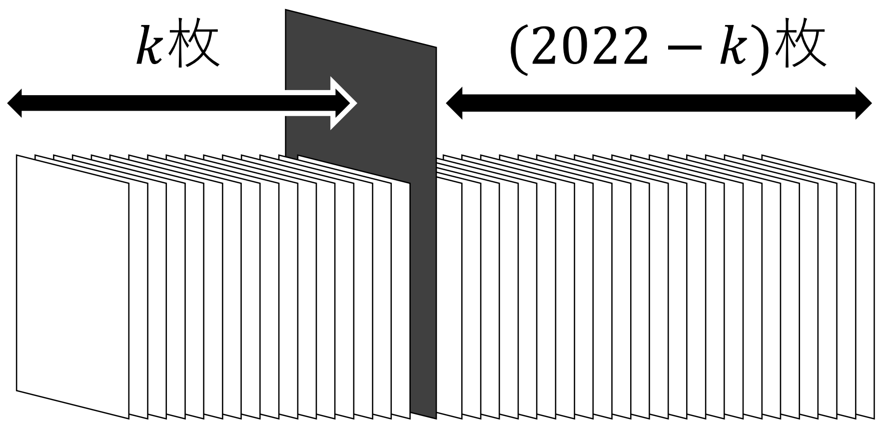
# 先月の解答・解説

## 2022 年 1 月の問題

1 から 2022 までの数字が 1 つずつ書かれた 2022 枚のカードを次の条件を満たすように一列に並べる。並べ方は何通りあるか。

（条件）:
カードの間に仕切りを入れて2つにわけたとき，
仕切りの前後のどちらも数字の合計が3の倍数でない。




$0<k<2022$

# 解説

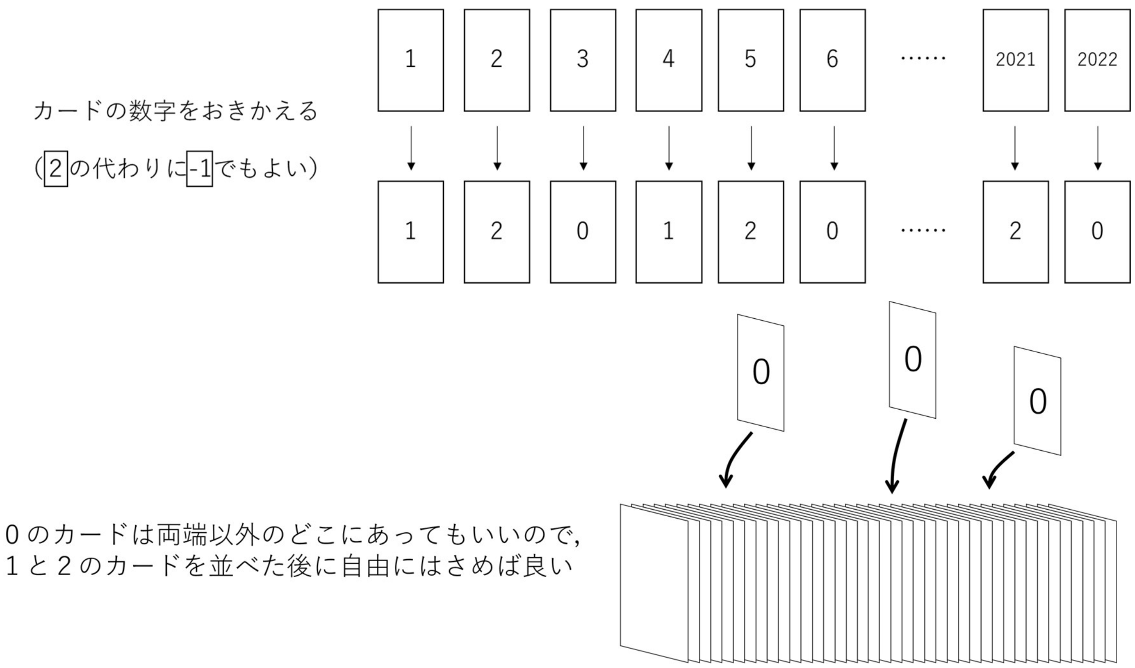
別のところで見た問題を，一般の n で書き直してみました。あのとき見た問題は，2022 のかわりに 5 が使われていたように思います。

はじめに結論を述べると，並べ方の数は $2\times{}_{2020}C_{674}\times(674!)^3$ 通りです。これは 2173 桁とかなり大きい数なので想像がつきにくいですが、だいたい 867! か $2^{7218}$ くらいです。

この手の問題では 2022 のかわりに 3 や 6 などの小さい数で樹形図を書いて実験してみるというのがよくある流れですが、うまくやれば実験なしで解けるのでいきなり 2022 で説明します。

まず 3 で割った余りに注目するために、数字を 0，1，2 に置き換えます。

$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を並びかえる方法を考えればよいのですが、その際$\boxed{0}$の位置は$\boxed{1}$と$\boxed{2}$に比べて自由に配置することができます。（$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を先に全部並べてから$\boxed{0}$を挟んでいくことを考えれば、両端以外のどこに挟んでも条件を満たすかどうかに影響がないため）




したがって$\boxed{1}$と$\boxed{2}$を並べる方法を考えます。

まず，左端には$\boxed{1}$を並べるということにして問題ないです（あとから 2 倍する)。すると、

・ 左から 2 番目に$\boxed{2}$を並べると，左から 1 ～ 2 枚目の合計が 3 となり条件を満たさない。

したがって左から 2 番目には$\boxed{1}$を並べる。このとき 1 ～ 2 枚目の合計は 2。

・ 左から３番目に$\boxed{1}$を並べると，左から１～３枚目の合計が３となり条件を満たさない。

したがって左から２番目には$\boxed{2}$を並べる。このとき１～３枚目の合計は４（３で割った余り１）。

・ 左から４番目に$\boxed{2}$を並べると，左から１～４枚目の合計が４となり条件を満たさない。

したがって左から２番目には$\boxed{1}$を並べる。このとき１～４枚目の合計は５（３で割った余り２）。

・ 以下同様

つまり、左端が$\boxed{1}$の場合は$\boxed{1}\rightarrow\boxed{1}\rightarrow\boxed{2}\rightarrow\boxed{1}\rightarrow\boxed{2}\rightarrow\boxed{1}\rightarrow\boxed{2}\rightarrow\cdots\rightarrow\boxed{1}\rightarrow\boxed{2}\rightarrow\boxed{2}$と並べるしかないのです。これと左端が２の場合をあわせて，$\boxed{1}$と$\boxed{2}$（各 674 枚）を並べる方法はたったの２通りであるとわかりました。

次に０を入れる方法ですが、両端以外の 2020 個の場所のどこに$\boxed{0}$を入れるか選択することになるので ${}_{2020}C_{674}$ 通りとなります。最後に$\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$をもとの$\boxed{1}$から$\boxed{2022}$までの数字に戻す方法がそれぞれ 674!通りあるので目的の$\underline{2\times{}_{2020}C_{674}\times(674!)^3\ \text{通り}}$が求められました。

さて、気になるのは１から 2022 以外の数字でもこのような配置ができるのかという事ですが、少し考えると１から 2021 では可能（$2\times{}_{2020}C_{673}\times(674!)^2\times673!$ 通り）で、１から 2023 では不可能であることがわかります。

また、３の倍数を条件にしましたが、これが「４の倍数にならない」「５の倍数にならない」などは計算可能なのでしょうか。これについては全くわかりませんでしたので、分かった方がいたら教えてください。