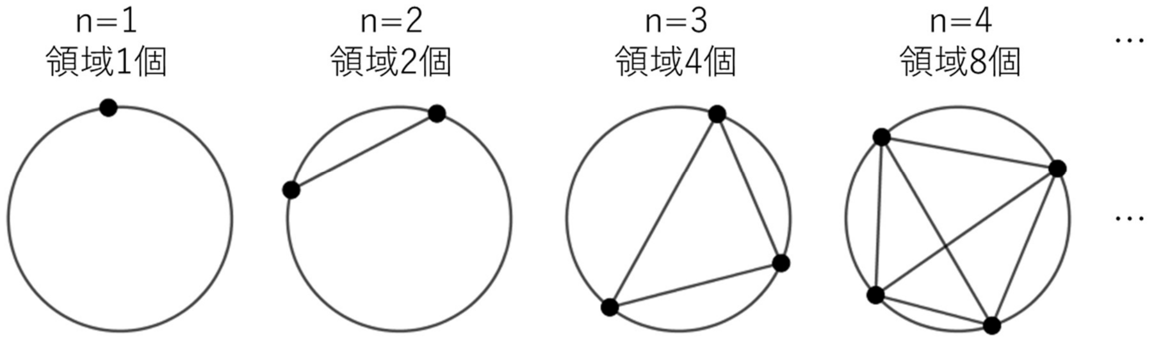
先月の解答・解説

2021年12月の問題

円周上に n 個の点をおいて線分で結ぶと、

円は 1 個，2 個，4 個，8 個，… に分割される。



(1) n=5, 6, 7 のとき、円は最大で何個に分割されるか。

(2) n=100 のとき、円は最大で何個に分割されるか。

（ヒント：オイラーの多面体定理を用いましょう）

解説

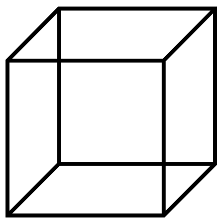
2018 年 12 月の問題とだいたい同じです。あのときは解答数が少なかったので、ヒントをつけています。

オイラーの多面体定理（数学 A）とは以下のようなものです。

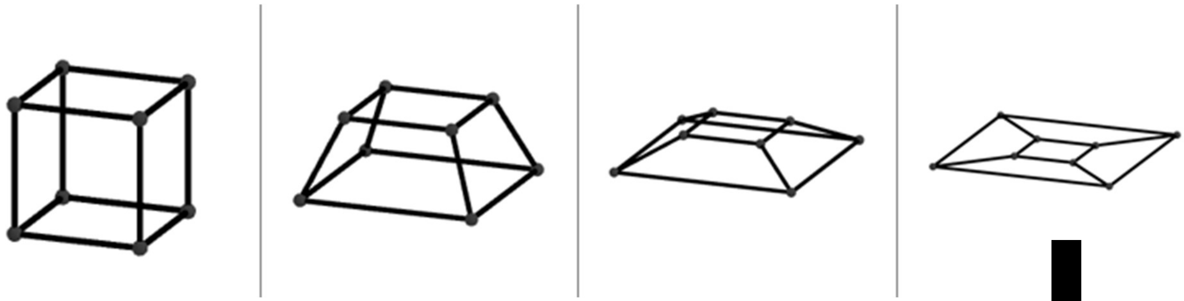
凸多面体の頂点，辺，面の数をそれぞれV, E, Fとすると

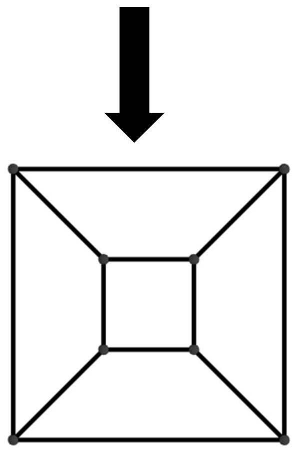
$$V - E - F = 2$$

立方体の場合$V = 8, E = 12, F = 6$なので$8 - 12 + 6 = 2$ →



数学 A では多面体に対してのみ用いられるこの定理ですが，もっと広い範囲で成り立つことが知られています。図のように立方体を平面に潰したときにできあがる図形を考えましょう。





このような，頂点と辺で構成されるものをグラフと呼びます。辺が交差しないようなグラフを平面グラフといい，平面グラフには面（辺で囲まれた領域）も考えることができます。このとき多面体と同様に

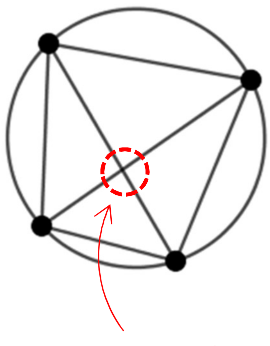
$$V - E + F = 2$$

が成り立ちます。（このとき、一番外側の領域もFにカウントされるので注意です。多面体を潰したときに面が 1 つ消えているのでちょうどになります。）

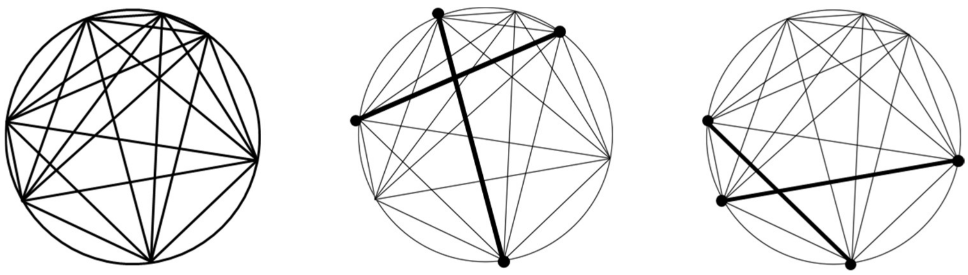
よって n 個の頂点を線で結んだときに、線が交わった場所も頂点とみなします。するとこのグラフは平面グラフとみなすことができるので多面体定理が使えるわけですね。

右の例（n ＝ 4）だと、2 本の線分が交わった場所も頂点に含めるので

頂点$V = 5$，辺 $E = 12$となり$F = 9$が言えました。外領域を含めて 9 個ですから、求める個数は$9 - 1$で 8 個になっています。



一般の n ではどうでしょうか。



n が 4 以上のとき，円に内接する n 角形の対角線の交点の個数は ${}_nC_4$ で表されます。頂点を 4 つ選べば交点 1 つが決まることが、上の図からわかるとおもいます。

そして，対角線の交点が ${}_nC_4$ 個あるので，対角線は ${}_nC_2+2\,{}_nC_4$ 本の線分にわかれます。（もともと対角線が ${}_nC_2$ 本あり，交点が 1 つふえると（2 本の線分が 2 つに分かれるので）線分の個数が +2 される。）

以上から　$V=n+{}_nC_4$，$E=n+{}_nC_2+2\,{}_nC_4$　なので，$F=2-V+E={}_nC_4+{}_nC_2+2$　となります。

よって（外領域を除くので）$F={}_nC_4+{}_nC_2+1$ 個が正解で，

(1)　n=5 のとき 16 個，　n=6 のとき 31 個，　n=7 のとき 57 個

(2)　${}_{100}C_4+{}_{100}C_2+1=3921125+4950+1=3926176$ 個

となりました。