先月の解答・解説

2021 年 11 月の問題

次の 3 つの条件を満たす自然数 n を考える。

（A） 10 桁である。

（B） 各桁の数の和が 31 である。

（C） 右の桁の数字は、左の桁の数字以上である。

たとえば n=1112333458 は条件を満たす。

自然数 n が条件(A)(B)(C)を満たすとき、9n の各桁の数の和としてありえる最大の値を求めよ。

出典：京都マス・フェス 2021　2nd ステージ

解説

2021 年の 10 月 31 日に実施された「京都マス・フェス 2nd ステージ」の問題です。10 と 31 にちなんだ問題になっています。　自分が作ったのですが、もっと多くの人に解いてほしいのでここでも出題することにしました。(許可はいただきました)

この問題のコツは、いったん条件(A)(B)を無視して(C)を満たす様々な数について実験してみることで、実際多くの人がその方法で解いているようでした。

いくつかの例で試してみると

$$1122234556 \times 9 = 10100111004 \qquad (9)$$

$$1111333468 \times 9 = 10002001212 \qquad (9)$$

$$1112223589 \times 9 = 10010012301 \qquad (9)$$

$$11111125\underline{99} \times 9 = 100000133\underline{9}1 \qquad (18)$$

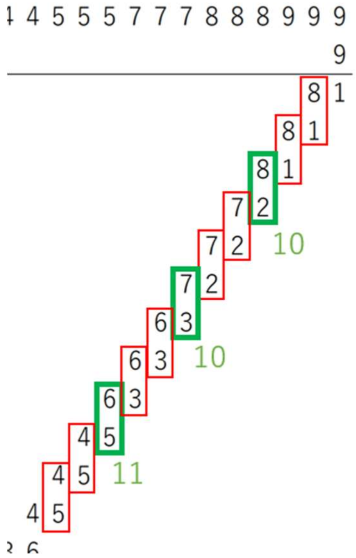
$$11112\underline{55555} \times 9 = 100012\underline{9999}5 \qquad (45)$$

となり、どうやら右端にいくつの数字が連続するかがすべてを決めているようです。これを検証するために、筆算することを考えてみましょう。

$$\begin{array}{rr}
 & 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 6\ 6\ 6\ 7\ 7\ 7\ 8\ 8\ 8\ 9\ 9\ 9 \\
\times & 9 \\
\hline
 & 8\ 1 \\
 & 8\ 1\ \\
 & 8\ 1\ \\
 & 7\ 2\ \\
 & 7\ 2\ \\
 & 7\ 2\ \\
 & 6\ 3\
\end{array}$$

すると、縦に足し算するときにすべての和が 9 以上になっていることがわかります。

一部の和は 10 以上になっていて、これは 9 倍している数字が変わっている場所です。数字が連続している場合は和が 9 です。

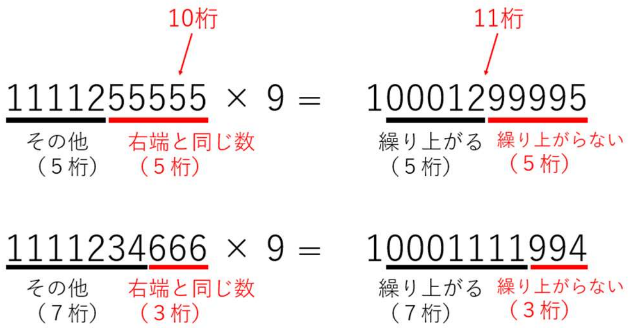


したがって、9 倍する数字（つまり n）を一の位から見ていくと

① はじめに数字が連続しているうちは、和が 9 なのでくり上がらない。
② 数字が別のものに変わると、和が 10 以上になりくりあがる。
③ 一度くり上がると、和は 9 以上なのでくり上がり続ける。

ということが見えてきます。

したがってくり上がりの回数は右端に並ぶ数字の数のみに依存します。

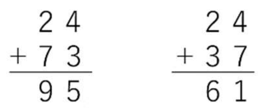


次に、くり上がりの回数が各桁の和に与える影響について考えます。回答してくれた人たちは、いずれも「1 回のくりあがりで和が 9 減る」ことを主張していました。

これは実際正しい主張ですが、本当は厳密に言う必要があります

（今回は省きますが、$n = 10^9a + 10^8b + \cdots + 10i + j$とおくと中学校の数学で示せます）

繰り上がりが起こると各桁の和が減る



というわけで、右側にいくつの桁を連続して置けるか？が争点となりました。順に検証すると

- 10 個の数字が連続する場合、その数を a とおくと$10a = 31$であり、そのような整数はない。
- 9 個の数字が連続する場合、その数を a とおくと$9a + 1 < 31$かつ a は 2 以上であり、a=2 または 3

  残り一桁が a=2 のときは 13, a=3 のときは 4 となり、条件（C）に反する。
- 8 個の数字が連続する場合、その数を a とおくと$8a + 2 < 31$かつ a は 2 以上であり、a=2 または 3

  この場合も残り二桁の合計が a=2 のとき 15, a=3 のとき 7 だから条件（C）に反する。
- 7 個の数字が連続する場合、その数を a とおくと$7a + 3 < 31$かつ a は 2 以上であり、a=2, 3, 4

  a=2, 3 の場合は不適だが、a=4 のときは n=1114444444 がある。

となり、答えは n=1114444444 のときの 63 となりました。

最大になるような n がちょうど 1 つだけあるというのが綺麗な問題ではないでしょうか。