先月の解答・解説

2021 年 10 月の問題

211 は 11 の倍数ではありませんが、数字を並び替えた 121 は 11 の倍数になります。

41111 は 11 の倍数ではなく、数字をどう並び替えても 11 の倍数になりませんが、
並び替えて 0 をいくつか間にはさんだ 1010141 は 11 の倍数になります。

一方で、721 や 5422、あるいは 11111 などはこれらの「数字を並び替える」「間に 0 を挟む」という操作をどのように行っても 11 の倍数になることはありません。

(1)　721 に対して上の 2 つの操作を行っても 11 の倍数にならないことを示しなさい。
(2)　上の 2 つの操作を行っても 11 の倍数にならないような数は他にも

$$10, 100, 1000, \cdots$$

などの例がありますが、桁に 0 を含まない例ではどれくらい大きい数があるでしょうか。

解説

まずは、11 の倍数の判定方法についておさらいします。

自然数 n の奇数番目の桁の和を A，偶数番目の桁の和を B とする。このとき n が 11 の倍数　⇔　$A-B$ が 11 の倍数

例として、

n=1540　…　A=1+4=5,　B=5+0=5　なので　A-B=0 だから n は 11 で割り切れる

n=7172　…　A=7+7=14,　B=1+2=3　なので　A-B=11 だから n は 11 で割り切れる

n=13579　…　A=1+5+9=15, B=2+7=5　なので　A-B=10 だから n は 11 で割り切れない

問題文の例だと，41111 は A=4+1+1=6，B=1+1=2 で A-B=2　（11 で割り切れない）ですが「入れ替え」と「0 をはさむ」操作によって 1010141 にすれば

A=1+1+1+1=4，B=0+0+4=4

となり A-B=0 だから割り切れるようになります。

以上の事実と観察により、次の事実が見えてきます。

「並び替え」「0 を挟む」という操作で 11 の倍数になる　⇔　桁の数字をうまく足し引きすると 11 の倍数になる 11 の倍数にならない　⇔　桁の数字をどのように足し引きしても 11 の倍数にならない

(1)

721 は，どのように足し引きしても結果が

$$7+2+1=10 \qquad -7+2+1=-4$$
$$7+2-1=8 \qquad -7+2-1=-6$$
$$7-2+1=6 \qquad -7-2+1=-8$$
$$7-2-1=4 \qquad -7-2-1=-10$$

の 8 種類にしかならないため，11 の倍数にはなりません。

⑵はどうでしょう。はじめに思いつくのは 1 を 9 個並べた「111111111」で、これはどうやっても 11 の倍数にできません。

実際この 9 個の数字を足し引きして作れるのは

$$-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$$

の 10 パターンしか存在しないので，いずれも 11 の倍数ではないから 111111111 は問題の条件を満たします。

次に、これを 9 倍した「999999999」を思いつきます。9 個の 9 を足し引きして作れるのは

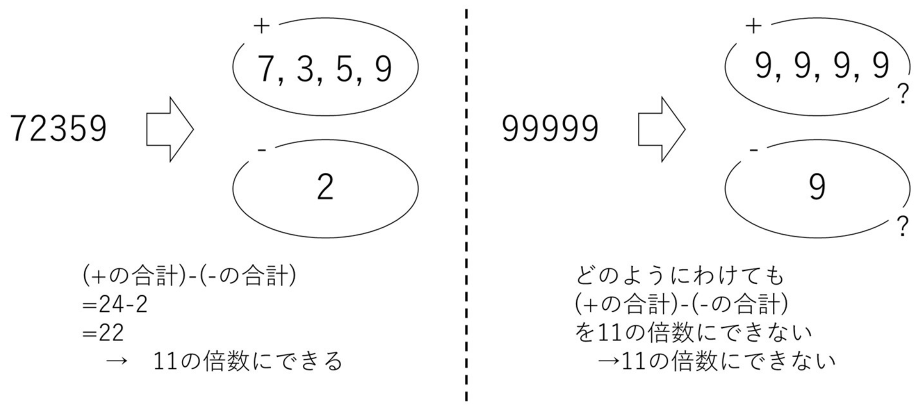
$$-81, -63, -45, -27, -9, 9, 27, 45, 63, 81$$

と、先ほどの数字のちょうど 9 倍であり、もちろん 11 の倍数ではありません。

もっと大きい数で 11 の倍数とならないものがあるでしょうか？結論を言うと、999999999 が最大であることがわかっています。理由をざっくりと説明します。

まず数字を 1 種類しか使わない数だと、10 桁以上では必ず 11 の倍数が作れるのでダメです。複数種類の数字を使うものを考えましょう。

一方、今までの話から 11 の倍数にできる数とできない数は下の図のような違いがあります。



このとき、123 のような「数字がバラバラ」の数より、999 のような「数字がそろっている」数のほうがグループ分けの自由度が高いので 11 の倍数になりやすいです。

したがって、3 種類以上の数字を使う数より 2 種類の数字を使う数のほうが自由度が低いので、この数について考察します。

また、「2 と 9」「3 と 8」「4 と 7」「5 と 6」は、＋と－を自由にいじれる状況では区別する必要がないので１，２，３，４，５のうち 2 種類を使う数で、さらに 10 桁以上のものについて考えればよいです。

10 桁以上なので 1 つの数字は 5 つ以上含まれているので，1 が 5 つ含まれていることにします。このとき考えられる数は

1111111112, 1111111122, 1111111222, 1111112222, 1111122222
1111111113, 1111111133, 1111111333, 1111113333, 1111133333
1111111114, 1111111144, 1111111444, 1111114444, 1111144444
1111111115, 1111111155, 1111111555, 1111115555, 1111155555

の 20 個ですが、これは全て 11 の倍数にすることができます（これを示すのは簡単です)。

次に 2 が 5 つ以上含まれる場合、3 が 5 つ以上含まれる場合…を考えます。100 通りをすべて検証してもそんなに時間はかかりませんが、11 が素数であることを用いれば次のような考え方もできます。

例えば「2222222223」という数について、2 を mod11 で 6 倍すると 1，3 を mod11 で 6 倍すると 7 なので 2222222223 は 1111111117 と（11 の倍数にできるかどうかという点では）全く同じです。

さらに 7 は 4 と同じとみなせるので、結局 1111111114 の結果と 2222222223 の結果は同じであり、11 の倍数にすることができます。これが他の数についても可能なので「2 種類の数字の数」については言うことができました。