先月の解答・解説

2021 年 9 月の問題

11, 22, 33, 1212, 100100, 123123, 20212021 など、同じ数を 2 つ繋げた数を「リピート数」と呼ぶことにします。

(1)　リピート数のうち平方数となるものはあるでしょうか。

(2)　リピート数のうち立方数となるものはあるでしょうか。

※　ここでは、0101 などの 0 で始まる数は考えないことにします。

解説

(1)は，2016 年 12 月の問題のリメイクでした。解説もほとんど同じことを書こうと思います。

$2n$桁のリピート数は10^n+1 を約数に持ちます。たとえば

$$1010 = 10\times 101$$
$$123123 = 123\times 1001$$
$$20212021 = 2021\times 10001$$

といった具合です。つまりリピート数は

$$a\times(10^n+1)\quad（ただし\ a\ は\ n\ 桁の数）$$

という形をしているのです。
ここで10^n+1の素因数分解に注目します。たとえば$n=3$のとき

$$a\times(10^3+1)=a\times 7\times 11\times 13$$

なのですが、これが平方数になるとすると a の素因数分解にも$7, 11, 13$が 1 つ以上は含まれる必要があります。するとaは 1001 の倍数ということになるのですが，これは a が n 桁（今回は 3 桁）という条件に反します。

同様に、10^n+1が平方因子をもたない（平方数の約数をもたない）ならばa が 10^n+1 の倍数になるしかなく，　a が n 桁（今回は 3 桁）という条件に反します。
逆に10^n+1が平方数を約数に持つ場合，つまり $10^n+1=p^2\times M$ となる素数 p が存在する場合はそのM倍$M\times(10^n+1)$が平方数となるので，簡単に見つけられそうです。よって10^n+1 の素因数分解に注目します。

n	10^n+1 の素因数分解
1	11
2	101
3	$7\times 11\times 13$
4	73×137
5	11×9091
6	101×9901
7	11×909091

これ以上は手計算では大変なのでやめました。
もちろんプログラミングを使えば平方因子を見つけられるでしょうが、手計算の範囲で終わらせたいですね。そこで、11 が多く登場していることに注目します。
$10^1+1,\ 10^3+1,\ 10^5+1,\ 10^7+1,\ldots$がすべて 11 の倍数のようですから、11 で割った商がさらに 11 で割れ

ないかどうか調べてみましょう。

整数が 11 の倍数であるかどうかは、各桁の数字を交互に足し引きすることで判定できます。

92719	→	$9-2+7-1+9=22$	が 11 の倍数だから、979 も 11 の倍数
123456	→	$1-2+3-4+5-6=-3$	が 11 の倍数でないから，123456 も 11 の倍数でない

これを使えば，

$$10^3+1=11\times 91$$
$$10^5+1=11\times 9091$$
$$10^7+1=11\times 909091$$
$$10^9+1=11\times 90909091$$
$$\vdots$$
$$10^{2k+1}+1=11\times \underbrace{9090\dots 90}_{(k-1)\text{組}}91$$

であることから，交互に足し引きした結果は

$$9-1=8$$
$$9-0+9-1=17$$
$$9-0+9-0+9-1=26$$
$$9-0+9-0+9-0+9-1=35$$
$$\vdots$$

と 9 ずつ増えていくので，この次の$10^{11}+1$が 11 の倍数であることがわかります。実際割り算することで

$$10^{11}+1=11^2\times 826446281$$

となります。

（※　実際には，もっと楽な方法で$10^{11}+1$が11^2の倍数であることがわかります。後のページを参照。）

さて、これで$826446281\times(10^{11}+1)=82644628100826446281$が平方数であることがわかりましたが、826446281は 9 桁の数なので，「0082644628100826446281」と 0 から始まるリピート数となっています。これを回避するために 4, 9, 16, 25, …倍します。すると

$$16\times 82644628100826446281=1322314049613223140496$$

で、無事 22 桁のリピート数を得ることができました（これがリピート数のうち最小のものです）。

(2)はどうでしょうか。

実は、解説を書くまでは(1)と同様に10^n+1が立方数の約数をもつ場合を探せばいいだけだと思い込んでいました。しかしこれだけではダメで、たとえば

$$10^n+1=p^3\times M$$

となるnとpが見つかったとして、立方数にするためにはMではなく（およそ）M^2をかける必要があるのです。

実際、そのようなnとpはすぐ見つかります。$10^{121}+1$は11^3の倍数、$10^{147}+1$は7^3の倍数、$10^{507}+1$は13^3の

倍数、…という具合です。(1)の解説では書きませんでしたが，次のことが成り立っています。

a を整数とする。
$10^1+1,\ 10^2+1, 10^3+1, \dots$のうち，最初に$a$の倍数であるものを$10^k+1$とする。このとき

$$10^n+1 \text{ が } a \text{ の倍数} \Leftrightarrow n=k,3k,5k,7k,\dots$$
$$10^n+1 \text{ が } a^2 \text{ の倍数} \Leftrightarrow n=ka,3ka,5ka,7ka,\dots$$
$$10^n+1 \text{ が } a^3 \text{ の倍数} \Leftrightarrow n=ka^2,3ka^2,5ka^2,7ka^2,\dots$$
$$10^n+1 \text{ が } a^4 \text{ の倍数} \Leftrightarrow n=ka^3,3ka^3,5ka^3,7ka^3,\dots$$
$$\vdots$$

証明は省略します。けっこう難しいので考えてもわからない場合は身近な数学の先生に聞くか，メールで問い合わせてください。合同式の知識が必要だと思います。

では(2)の答えは結局何なのか？ですが、答えは「存在しない」となります。
証明は以下のようになります。わりと複雑なのですが上の枠の事実を認めればなんとかなります。

（証明）
① 2n 桁のリピート数で立方数のものが存在するとして、それを$M\times(10^n+1)$とおく（Mはn桁の数)。
② $10^n+1=a_1\times a_2^2\times a_3^3\times\dots\times a_m^m$と分解する。($a_1,a_2,a_3,\dots,a_m$は互いに素な自然数)
③ このとき、Mは$a_1^2\times a_2\times a_4^2\times a_5\times a_7^2\times a_8\times\dots$の倍数である。
特に、Mがa_1^2の倍数であることに注目する。
④ 上の枠から、各a_iについてnはa_i^{i-1}の倍数である。すなわち$n\geqq a_2\times a_3^2\times a_4^3\times\dots\times a_m^{m-1}$
⑤ ここで、$a_2^2\times a_3^3\times\dots\times a_m^m\leqq(a_2\times a_3^2\times a_4^3\times\dots\times a_m^{m-1})^2<n^2$
⑥ $10^n+1=a_1\times a_2^2\times a_3^3\times\dots\times a_m^m$ であるから、 $a_1=\frac{10^n+1}{a_2^2\times a_3^3\times\dots\times a_m^m}>\frac{10^n+1}{n^2}$
⑦ 自然数nに対して $10^{\frac{n}{2}}>n^2$ である[1]から $a_1>\frac{10^n+1}{n^2}>\frac{10^n+1}{10^{\frac{n}{2}}}>10^{\frac{n}{2}}$
⑧ よって$M>10^n$であり，Mが n 桁であることに矛盾する。
背理法からリピート数に立方数は存在しないことが示された。

というわけで、(2)はかなりの難問でした。

[1] 数学的帰納法のよくある練習問題ですね。