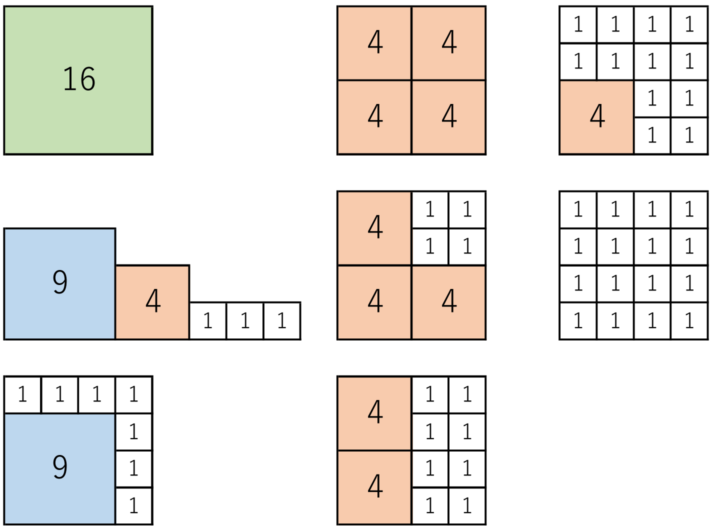
先月の解答・解説

2021 年 7,8 月の問題

１円の硬貨，４円の硬貨，９円の硬貨，１６円の硬貨，25 円の硬貨…と、n^2円の硬貨のみが存在する世界を考えます。

この世界で 16 円を支払う方法は，図の８通りがあります。



(1)　25 円を支払う方法は、何通りありますか。36 円ではどうですか。

(2)　図の支払い方のうち硬貨が４×４の正方形に収まる支払い方は７通りで、残りの１通りは４×４の正方形におさめることができません。
(1)で考えた 25 円や 36 円の支払い方のうち、５×５や６×６の正方形におさまらない支払い方は何通りありますか。

解説

実際に数えるのが結局一番速いと思います。

(1)　25 円を支払う方法は

$$
\begin{aligned}
25 &= 25 \\
&= 16+9 \\
&= 16+4+4+1 \\
&= 16+4+1+1+1+1+1 \\
&= 16+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 9+9+4+1+1+1 \\
&= 9+9+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 9+4+4+4+4 \\
&= 9+4+4+4+1+1+1+1 \\
&= 9+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 9+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 4+4+4+4+4+4+1 \\
&= 4+4+4+4+4+1+1+1+1+1 \\
&= 4+4+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 4+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

の 19 通りがあります。16 円の硬貨を何枚含むか、9 円を何枚含むか…で場合分けするのが数えるコツです。

<table>
<tr><td>25 円硬貨</td><td>16 円硬貨</td><td>9 円硬貨</td><td>4 円硬貨</td><td rowspan="8"></td><td></td></tr>
<tr><td>1 枚</td><td>0 枚</td><td>0 枚</td><td>0 枚</td><td>1 通り</td></tr>
<tr><td rowspan="6">0 枚</td><td rowspan="2">1 枚</td><td>1 枚</td><td>0 枚</td><td>1 通り</td></tr>
<tr><td>0 枚</td><td>0〜2 枚</td><td>3 通り</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0 枚</td><td>2 枚</td><td>0〜1 枚</td><td>2 通り</td></tr>
<tr><td>1 枚</td><td>0〜4 枚</td><td>5 通り</td></tr>
<tr><td>0 枚</td><td>0〜6 枚</td><td>7 通り</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>計</td><td>19 通り</td></tr>
</table>

大きい額の硬貨の枚数が決まれば、小さい額の硬貨を何枚使えるか評価することができます。
この方法なら、36 枚の場合もなんとか数えられます。

36 円硬貨	25 円硬貨	16 円硬貨	9 円硬貨	4 円硬貨		
1 枚	0 枚	0 枚	0 枚	0 枚		1 通り
0 枚	1 枚	0 枚	1 枚	0 枚		1 通り
			0 枚	0～2 枚		3 通り
	0 枚	2 枚	0 枚	0～1 枚		2 通り
		1 枚	2 枚	0 枚		1 通り
			1 枚	0～2 枚		3 通り
			0 枚	0～5 枚		6 通り
		0 枚	4 枚	0 枚		1 通り
			3 枚	0～2 枚		3 通り
			2 枚	0～4 枚		5 通り
			1 枚	0～6 枚		7 通り
			0 枚	0～9 枚		10 通り
					計	43 通り

もっと大きい数字の場合も同じなのですが、手間がかかってしまいます。もしプログラミングを用いて個数を求めるなら、DP（動的計画法）を使うといいでしょう。そうでなくても、

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{36})(1+x^4+x^8+\cdots+x^{36})(1+x^9+x^{18}+\cdots+x^{36})(1+x^{16}+x^{32})(1+x^{25})(1+x^{36})$$

を展開したときのx^{36}の係数を求めることで同じ結果を得られます（計算量は DP の時と同じです)。

結論として

25 円　…　19 通り

36 円　…　43 通り　　　となります。

(2)

先ほどのリストに、条件を満たすか満たさないかを書き込んでみました。

最大金額の硬貨の種類とその枚数で分類してみると、上（1 円硬貨が少ないほう）にいくほど×になり、下（多いほう）にいくほど〇になっています。この境目がどこかを考えれば、数えるのが楽そうですね。

25 = ○ 25
= ✖ 16+9
= ✖ 16+4+4+1
= ✖ 16+4+1+1+1+1+1
= ○ 16+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ✖ 9+9+4+1+1+1
= ✖ 9+9+1+1+1+1+1+1+1
= ✖ 9+4+4+4+4
= ○ 9+4+4+4+1+1+1+1
= ○ 9+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1
= ○ 9+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ○ 9+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ✖ 4+4+4+4+4+4+1
= ✖ 4+4+4+4+4+1+1+1+1+1
= ○ 4+4+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ○ 4+4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ○ 4+4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ○ 4+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
= ○ 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1

36 円硬貨	25 円硬貨	16 円硬貨	9 円硬貨	4 円硬貨			
				全体	正方形にならない		
1 枚	0 枚	0 枚	0 枚	0 枚			
0 枚	1 枚	0 枚	1 枚	0 枚	0 枚		1 通り
			0 枚	0〜2 枚	1〜2 枚		2 通り
	0 枚	2 枚	0 枚	0〜1 枚	0〜1 枚		2 通り
		1 枚	2 枚	0 枚	0 枚		1 通り
			1 枚	0〜2 枚	0〜2 枚		3 通り
			0 枚	0〜5 枚			
		0 枚	4 枚	0 枚			
			3 枚	0〜2 枚	2 枚		1 通り
			2 枚	0〜4 枚	4 枚		1 通り
			1 枚	0〜6 枚	6 枚		1 通り
			0 枚	0〜9 枚			
						計	12 通り

結局、上の表のようになりました。結論は

25 円　…　8 通り

36 円　…　12 通り　　　です。

さて、49 円，64 円，81 円，…ではどうなっているのでしょうか。これは以下の表のようになります。

	16 円	25 円	36 円	49 円	64 円	81 円	100 円	121 円	144 円	169 円	196 円
全体（A）	8	19	43	98	220	504	1116	2468	5368	11592	24694
正方形にならない	1	8	12	41	72	192	362	909	1524	3699	6928
正方形になる（B）	7	11	31	57	148	312	754	1559	3844	7893	17766

この表の A 列の値はオンライン整数列大辞典（OEIS）の数列 A037444 から[1]，B 列は A034295 から[2]引用しました。やはりプログラミングを用いて計算されているようです。

分割数を考える場合、値をきっちり求めることはできなくなりがちです。

その場合はオーダー（数列の増加のスピード）を考える事が多く、たとえば A 列の数$\mathrm{a_n}$について$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=1$である、つまり n を大きくしていくと支払いの方法は2^{n}や1.5^{n}，あるいは1.01^{n}より少なくなるということが言えるそうです。数列のオーダーや増加量というのは高校ではあまり触れない概念ですが、調べてみてください。

[1] https://oeis.org/A037444

[2] https://oeis.org/A034295