

先月の解答・解説

2021年6月の問題

次の2つの等式が成り立ちます。

$$1^1 + 3^1 + 8^1 = 5^1 + 7^1$$

$$1^2 + 3^2 + 8^2 = 5^2 + 7^2$$

(1) 「1, 3, 8, 5, 7」のような5つの数字の組、

つまり $a^n + b^n + c^n = d^n + e^n$ が $n = 1, 2$ の両方で成り立つような自然数 a, b, c, d, e の組を

他にも探してください。

(2) (1)の答えは無限に見つけることができます。

文字などを用いて無限個の答えを述べてください。(これも複数の答えがあります)

(3) 【チャレンジ問題】 $n = 1, 2$ のほかの場合ではどうですか。

あるいは、 a, b, c, d, e の部分が5つの変数に限らない場合はどうですか。

解説

今年は京都教育委員会が「京都マス・フェス」という（洛北算額に似た）試みをするようです。これは計算機などの使用も許されるようなので、こちらもプログラミングで解くことを意識した問題を出してみました。

実際に a,b,c,d,e が 30 以下である解をパソコンで計算してみると、120 個の解がある¹ことが 1 秒足らずで分かりました。これを眺めながら法則を探すと、(2)はラクだったかもしれません。

(1) とりあえず、いくつか挙げてみます。

a+b+c が小さい順	a=1 のもののみ
(a, b, c, d, e)=	(a, b, c, d, e)=
(1, 1, 4, 3, 3),	(1, 1, 4, 3, 3),
(1, 2, 6, 4, 5),	(1, 2, 6, 4, 5),
(1, 3, 8, 5, 7),	(1, 3, 8, 5, 7),
(2, 2, 8, 6, 6),	(1, 4, 9, 7, 7),
(2, 2, 9, 5, 8),	(1, 4, 10, 6, 9),
(1, 4, 9, 7, 7),	(1, 5, 12, 7, 11),
(1, 4, 10, 6, 9),	(1, 6, 12, 9, 10),
(2, 3, 10, 7, 8),	(1, 6, 14, 8, 13),
(2, 3, 12, 6, 11),	(1, 7, 16, 9, 15),
(1, 5, 12, 7, 11),	(1, 8, 15, 11, 13),
(2, 4, 12, 8, 10),	(1, 8, 18, 10, 17),
(3, 3, 12, 9, 9),	(1, 9, 16, 13, 13),
(1, 6, 12, 9, 10),	(1, 9, 20, 11, 19),
(1, 6, 14, 8, 13),	(1, 10, 18, 13, 16),
(2, 4, 15, 7, 14),	(1, 10, 22, 12, 21),
(2, 5, 14, 9, 12),	(1, 11, 24, 13, 23),
(3, 4, 14, 10, 11),	(1, 12, 20, 16, 17),
(3, 3, 16, 7, 15),	(1, 12, 21, 15, 19),
(3, 4, 15, 9, 13),	(1, 12, 26, 14, 25),
(2, 6, 15, 11, 12),	(1, 13, 28, 15, 27),
(1, 7, 16, 9, 15),	(1, 14, 24, 17, 22),
(1, 8, 15, 11, 13),	(1, 14, 30, 16, 29),
(2, 6, 16, 10, 14),	(1, 15, 24, 19, 21),
(3, 5, 16, 11, 13),	(1, 16, 25, 21, 21),
(4, 4, 16, 12, 12),	(1, 16, 27, 19, 25),
(2, 5, 18, 8, 17),	(1, 18, 28, 22, 25),
(1, 9, 16, 13, 13), ...	(1, 18, 30, 21, 28), ...

¹ $a \leq b \leq c, d \leq e$ の解のみをカウントしました

(2) 上の表を眺めてどんな法則が見つかるでしょうか。

例えば

$$(1, 1, 4, 3, 3), (2, 2, 8, 6, 6), (3, 3, 12, 9, 9), (4, 4, 16, 12, 12), \dots$$

のような、全体を定数倍したものがみつかります。よって(2)の答えの1つとして

$$(a, b, c, d, e) = (x, x, 4x, 3x, 3x)$$

を見付けることができました。

全く同様にして

- $(1, 2, 6, 4, 5), (2, 4, 12, 8, 10), (3, 6, 18, 12, 15), (4, 8, 24, 16, 20), \dots$
- $(1, 3, 8, 5, 7), (2, 6, 16, 10, 14), (3, 9, 24, 15, 21), (4, 12, 32, 20, 28), \dots$
- $(2, 2, 9, 5, 8), (4, 4, 18, 10, 16), (6, 6, 27, 15, 24), (8, 8, 36, 20, 32), \dots$

なども見付けられます。

定数倍はあまりにも当たり前なので、こんどは $a=1$ の場合だけを見てみましょう。すると

- $(1, 1, 4, 3, 3), (1, 2, 6, 4, 5), (1, 3, 8, 5, 7), (1, 4, 10, 6, 9), (1, 5, 12, 7, 11), \dots$
- $(1, 4, 9, 7, 7), (1, 6, 12, 9, 10), (1, 8, 15, 11, 13), (1, 10, 18, 13, 16), \dots$

という列が見つかります。つまり

$$(a, b, c, d, e) = (1, x, 2 + 2x, x + 2, 2x + 1)$$

$$(a, b, c, d, e) = (1, 2x, 3x + 3, 2x + 3, 3x + 1)$$

と書けるものです。実際に $a^2 + b^2 + c^2$ や $d^2 + e^2$ の値などを計算してみると、一致していることが分かります。

今回は「まず計算機のを借りてたくさん解を出し、観察する」という手法で(2)の答えを出しましたが、手計算のみでも様々な結論をだすことができます。たとえば定数倍については計算機のが無くてもすぐ思いつきますし、 $(a, b, c, d, e) = (1, x, 2 + 2x, x + 2, 2x + 1)$ についてはおそらく手計算で出してきた解答もありました。

そのほか、たとえば $(a, b, c, d, e) = (2, x - 2, 3x + 3, x + 4, 3x + 1)$ を見つけることができれば²、その流れで $(a, b, c, d, e) = (4, x - 1, 3x + 3, x + 5, 3x + 1)$ や $(6, x + 5, 3x + 2, x + 8, 3x + 1)$ などを見つけることができるでしょう。いろいろ考えてみてください。

² これはがんばって手計算で見つけました

(3) これは完全にプログラミングする人向けの課題なので、チャレンジ問題としました。

たとえば次のようなものが考えられると思います。

【 $n=1,2$ の部分を変更して, $n=1,3$ としたもの】

$(a, b, c, d, e)=(1, 5, 9, 7, 8), (2, 4, 10, 7, 9)$ など

【 $n=1,2$ の部分を変更して, $n=2,4$ としたもの】

$(a, b, c, d, e)=(3, 5, 8, 7, 7), (7, 8, 15, 13, 13)$ など

【 $a^n + b^n + c^n = d^n + e^n$ の部分を変更して, $a^n + b^n + c^n = d^n + e^n + f^n$ としたもの】

$(a, b, c, d, e, f)=(1, 5, 6, 2, 3, 7), (1, 6, 8, 2, 4, 9)$ など

他にも色々考えられると思います。コンピュータを使った探究活動はとてもお手軽なので、ぜひプログラミングの技能を身につけて、試してみてください。意外と簡単です。