先月の解答・解説

2021 年 5 月の問題

太郎くんは、１から６までのカードを２枚ずつ、合計１２枚持っています。また、図１や図２のようなカードを置くための台を持っています。

カードを置いたあと、式を計算します。（図２のとき、計算結果は７５です）

図１（カードを置く前）

$$\boxed{}\times\boxed{}+\boxed{}\times\boxed{}+\boxed{}\times\boxed{}+\boxed{}\times\boxed{}+\boxed{}\times\boxed{}+\boxed{}\times\boxed{}$$

図２（カードを置いた後）

$$\boxed{1}\times\boxed{2}+\boxed{2}\times\boxed{4}+\boxed{5}\times\boxed{6}+\boxed{3}\times\boxed{3}+\boxed{4}\times\boxed{5}+\boxed{1}\times\boxed{6}$$

(1)　計算結果は最大でいくつですか。

(2)　計算結果は最小でいくつですか。

(3)　カードが１から１０までの合計２０枚なら、どうなりますか。

（カードを置く台も拡張することにします）

解説

４月に続いて、手の動くタイプの問題を出題しました。
実際に試していくと、

$$(1)\quad 1\times1+2\times2+3\times3+4\times4+5\times5+6\times6=91 \quad（最大）$$

$$(2)\quad 1\times6+2\times5+3\times4+4\times3+5\times2+6\times1=56 \quad（最小）$$

が答えであることがわかるでしょう。(3)も、最大が３８５，最小が２２０であることはすぐ見抜いた人が多かったはずです。

では、これをどう証明すればいいでしょうか？
(1)(2)ではカードの組み合わせ方はせいぜい７２０通りなので全パターンを試せなくはないでしょう。しかし(3)になると数が多くて（36 万通り）数学の力を使わなくては難しいはずです。

９１が最大，５６が最小であることを証明するために、次のことを証明してみましょう。

カードに関する性質

$\boxed{a},\boxed{b},\boxed{c},\boxed{d}$の４枚のカードがあるとき，a ≦ b ≦ c ≦ d とすれば

$$\boxed{a}\times\boxed{d}+\boxed{b}\times\boxed{c} \quad\leqq\quad \boxed{a}\times\boxed{c}+\boxed{b}\times\boxed{d} \quad\leqq\quad \boxed{a}\times\boxed{b}+\boxed{c}\times\boxed{d}$$

証明は以下の通りです。

① $ad+bc\leqq ac+bd$ であることの証明：
右辺から左辺を引くと　$(ac+bd)-(ad+bc)=(b-a)(d-c)\geqq0$　なので、左辺≦右辺

② $ac+bd\leqq ab+cd$ であることの証明：
右辺から左辺を引くと　$(ab+cd)-(ac+bd)=(d-a)(c-b)\geqq0$　なので、左辺≦右辺

①②から　$ad+bc\leqq ac+bd\leqq ab+cd$

これを使えば(1)は次のように証明できるでしょう。

○　あるカードの配置で、$\boxed{a}$,$\boxed{b}$,$\boxed{c}$,$\boxed{d}$の４枚に注目したときに$\boxed{a}\times\boxed{d}+\boxed{b}\times\boxed{c}$ または $\boxed{a}\times\boxed{c}+\boxed{b}\times\boxed{d}$の配置になっていたとする。
この配置は、この４枚を$\boxed{a}\times\boxed{b}+\boxed{c}\times\boxed{d}$に並び替えればより大きくなるので、最大の配置ではない。

○　したがって、最大の配置はどの４枚の組み合わせを見ても$\boxed{a}\times\boxed{b}+\boxed{c}\times\boxed{d}$の配置になっている。

○　$\boxed{1}$のカードのペアになるのは$\boxed{1}$しかない。もし２枚の$\boxed{1}$が別のカード（$\boxed{x}$,$\boxed{y}$とする。$x \leqq y$）とペアになっていれば、a=1, b=1, c=x, d=y としたとき$\boxed{a}\times\boxed{b}+\boxed{c}\times\boxed{d}$の配置にならないので矛盾する。

○　$\boxed{1}$と$\boxed{1}$がペアになるので、残る$\boxed{2}$以上の組み合わせについて考えればいい。先ほどの考え方をもう一度つかえば、$\boxed{2}$のカードのペアになるのは$\boxed{2}$しかない。

○　以降繰り返しで、最大の組み合わせは１×１＋２×２＋３×３＋４×４＋５×５＋６×６

全く同様に、(2)も証明ができます。

○　最小の配置はどの４枚の組み合わせを見ても$\boxed{a}\times\boxed{d}+\boxed{b}\times\boxed{c}$の配置になっている。

○　$\boxed{1}$のカードのペアになるのは$\boxed{6}$しかない。$\boxed{1}$と$\boxed{6}$が別のカードとペアになっている、つまり

$$\boxed{1}\times\boxed{x}+\boxed{y}\times\boxed{6} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{1}\times\boxed{y}+\boxed{x}\times\boxed{6} \qquad \left(\begin{array}{c} 1 \leqq x \leqq y \leqq 6 \\ x \neq 1 \text{ または } y \neq 6 \end{array}\right)$$

になっていれば、a=1, b=x, c=y, d=6 としたとき$\boxed{a}\times\boxed{d}+\boxed{b}\times\boxed{c}$の配置にならないので矛盾する。

○　$\boxed{1}$と$\boxed{6}$が２枚ずつペアになるので、残る$\boxed{2}$から$\boxed{5}$の組み合わせについて考えればいい。先ほどの考え方をもう一度つかえば、$\boxed{2}$のカードのペアになるのは$\boxed{5}$しかない。

○　以降繰り返しで、最小の組み合わせは１×６＋２×５＋３×４＋４×３＋５×２＋６×１＝５６

いかがでしょうか。(3)についても全く同様です。
今回は挑戦してくれた人がいつもより多く、うれしいです。６月の問題にも（今月より難しいですが）ぜひチャレンジしてほしいと思います。