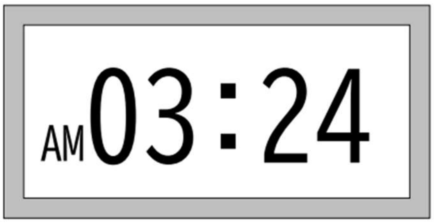
先月の解答・解説

2021 年 4 月の問題

時計の「時」と「分」をかけ算した値を X とします。

たとえば右の場合は 3 と 24 をかけて、X＝72 です。



以降、X が 0 でない場合のみを考えます。次の問題に答えなさい。

また、この時計では「11 時 59 分」の次は「0 時 0 分」が表示されます。

（1） X=200 のとき、時刻は何時何分ですか。考えられるものをすべて書きなさい。

（2） A 君は時計を見て X の値を計算しました。

その 47 分後に再度 X の値を計算したところ、さきほどの値と一致しました。

A 君が最初に時計を見たのはいつですか。考えられるものをすべて書きなさい。

（3） B 君は時計を見て X の値を計算しました。

その 207 分後に再度 X の値を計算したところ、さきほどの値と一致しました。

B 君が最初に時計を見たのはいつですか。考えられるものをすべて書きなさい。

（4）【チャレンジ問題】 C 君は時計を見て X の値を計算しました。

その N 分後に再度 X の値を計算したところ、さきほどの値と一致しました。

さらに N 分後に X の値を計算したところ、前の 2 回の値と一致しました。

C 君が 2 回目に時計を見たのはいつですか。ただし N は整数とします。

解説

(4)を解くのは大変だったのではないでしょうか。

(1)は、「時」の部分が1から１１までしかないことを考えると

「04:50」「05:40」「10:20」

の3つしかないことがわかります。200の約数を考えるとすぐでした。

(2)は、数学Aの「整数の性質」の知識を使って話を進めましょう。47分が経過したとすると、

① はじめ a 時 b 分 → 2回目 a 時（$b+47$）分
② はじめ a 時 b 分 → 2回目 $(a+1)$ 時（$b-13$）分
③ はじめ 11 時 b 分 → 2回目 0 時（$b-13$）分

のどちらかになります。このうちXの値が一致する可能性があるのは②のみなので、

$$ab=(a+1)(b-13)$$

が成立するような整数a,bを探せばよいです。これを変形すると

$$ab=ab-13a+b-13$$
$$13a+13=b$$

となり、bは13の倍数であることがわかります。Xが0でないから a も0ではないので

$$b=26 \text{ or } 39 \text{ or } 52$$

となります。よって時刻は「1時26分」「2時39分」「3時52分」の3通りで、これらは条件をみたします。

(3)も同様にやっていきます。207分というのは3時間27分ということなので、

①:「時」「分」の両方が増加 a 時 b 分 → $(a+3)$ 時（$b+27$）分
②:「時」が増加、「分」が減少 a 時 b 分 → $(a+4)$ 時（$b-33$）分
③:「時」が減少、「分」が増加 a 時 b 分 → $(a-9)$ 時（$b+27$）分
④:「時」「分」の両方が減少 a 時 b 分 → 2回目 $(a-8)$ 時（$b-33$）分

の4パターンが考えられます。

ここでパターン①について、「時」と「分」の両方が増えているのでXの値が等しくなることはありません。同様に④は両方が減っているので、Xが等しくなることはありません。なので②③について考えます。

②のときは

$$ab=(a+4)(b-33)$$
$$33(a+4)=4b$$

となりますが、これは不可能です（a,bは 0 ではないことに注意）。

よって可能性があるのは③のときで、これを検証すると

$$ab=(a-9)(b+27)$$
$$b=3(a-9)$$

b が正であることから$a=10,11$のいずれかとなり、求める時刻は「10 時 3 分」「11 時 6 分」となります。

最後に(4)です。
(3)で考えたことから、「時」「分」の変化の仕方は

$$(\text{A}):\quad 1\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン②}}2\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン③}}3\text{回目}$$

$$(\text{B}):\quad 1\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン③}}2\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン②}}3\text{回目}$$

$$(\text{C}):\quad 1\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン②}}2\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン②}}3\text{回目}$$

$$(\text{D}):\quad 1\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン③}}2\text{回目}\xrightarrow{\text{パターン③}}3\text{回目}$$

の 4 通りしかありません。（C）（D)では条件をみたすものがないことと、（A）と（B）では結局同じものが見つかることから、（A）のパターンのみを考えます。（理由は後述します）

このとき、それぞれの時刻は

$$(a-n)\text{ 時}（b-m+60)\text{分} \quad \rightarrow \quad a\text{ 時 }b\text{ 分} \quad \rightarrow \quad (a+n-13)\text{ 時}（b+m）\text{分}$$

とおくことができます（それぞれ、$(n-1)$ 時間 m 分が経過）。

あとはこの 3 つが一致することから

$$\begin{cases}(a-n)(b-m+60)=ab & \text{...式①}\\ (a+n-13)(b+m)=ab & \text{...式②}\end{cases}$$

という式が得られます。ここからなんとかして n と m を絞り込んでいくしかありません。しかし、やってみるとわかるのですが、(2)(3)のように簡単に答えを得ることは難しいです。

実は(4)は、きれいな解法を作問側で用意しないまま出題しました。問題をつくってみたら答えが非常にきれいなものになったので、解法は後にすることにして出題しています。

事前にプログラミングを用いて

1時４８分	→	８時６分	→	２時２４分	(N=378)
２時２４分	→	８時６分	→	１時４８分	(N=342)

の２つのみが条件を満たす、つまり答えが「８時６分」であることだけは確認しました。きれいな解法はあるのかもしれませんが、こちらとしては泥臭い方法しかみつかりませんでした。

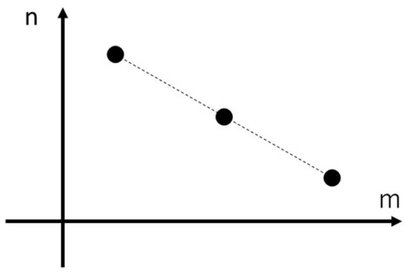
泥臭い方法とは、$2 \leqq n \leqq 11$であることを使ってしらみつぶしに調べていくものです。

例えば$n = 2$のときは，式②を変形すると$am = 11(b + m)$となり，$m \geqq 0$と$b > 0$から$a > 11$が成り立つことになります。このようなaは存在しないので，$n = 2$となる答えは存在しません。

同様に$n = 3, 4, \ldots$と確かめていくと，$n = 7$のときに上の結果（$m = 18, a = 8, b = 6$）を得ることができます。全くきれいではないし長いのでここにも書きませんが、得られる結果は１つのみです。

これだけではなんなので、パターン(C)(D)が条件を満たさないこと、(A)と(B)で同じ結果が得られることの理由を書きます。(C)（D)のように同じパターンを２回繰り返す場合、点(m, n)を座標平面上にプロットすると３つの点が直線状に並びます。

直線状の３つの点の積が等しくなることはない[1]ので、これは条件を満たしません。



(A)と(B)で同じ結果を得られることについては、上の正解の例をみてみましょう。(A）で結果が１つ得られた場合、(B）でその「逆」にあたるものを得られます。720 分で時計が１周するので、N=378 で発見されれば$720 - 378 = 342$で、N=342 で必ず発見されます。

今回の問題では最終的に泥臭い解法でしたが、このように考えれば計算量をだいぶ減らすことができます。いろいろ考えるときの参考にしてください。

[1] 曲線$mn = k$（kは定数)と直線の交点は２つしかないため。