

先月の解答・解説

2021年2月の問題

$n \times n$ マスの部屋に、 1×2 または 2×1 の長方形を配置します。

$n=4$ のとき、図1のように配置すると 1×1 の空きマスが4つできます。

$n=5$ のとき、図2のように配置すると 1×1 の空きマスが7つできます。

- (1) 空きマスができるだけ多くなるように配置するとき、 6×6 ではいくつの空きマスができますか。
- (2) 7×7 ではどうですか。

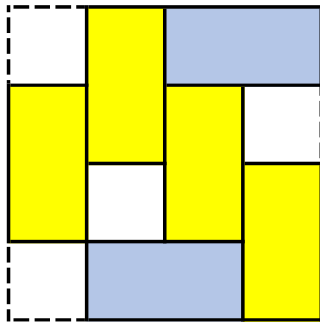


図 1

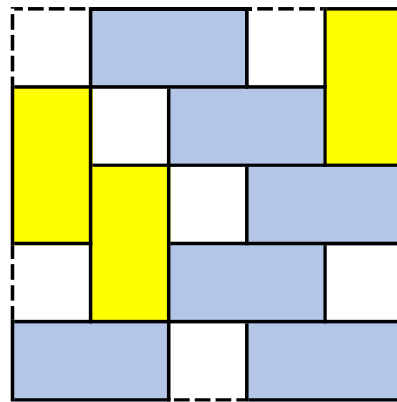
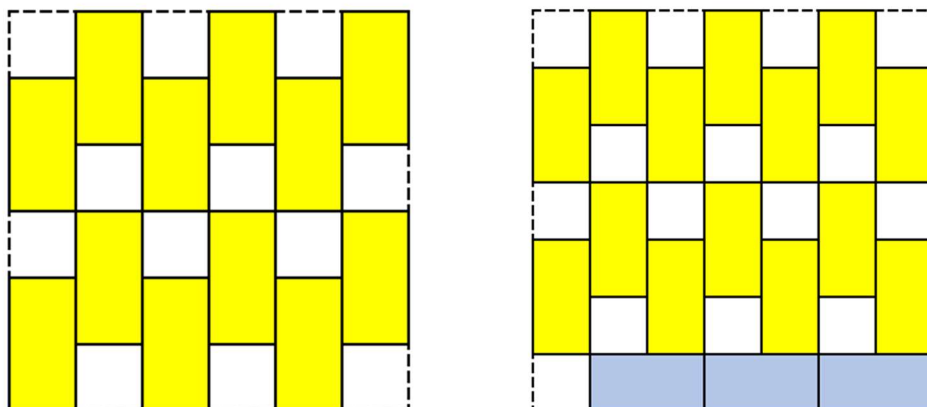


図 2

解説

いろいろと手の動く問題だったと思います。

はじめに結論を言うと、 6×6 では12個、 7×7 では15個の空きマスができます。例えば以下のような並べ方があります。



いろいろと試してみると、どうやら「空きマスの最大数は、全体の3分の1程度になる」ということがわかってきます。 $n \times n$ の場合を、表にしてみましょう。

1辺の長さ	1	2	3	4	5	6	7	n
面積	1	4	9	16	25	36	49	n^2
空きマスの最大数 (予想)	0	0	3	4	7	12	15	

最大数については、まだ最大であるという証明をしていないので「予想」としておきました。(実際最大なのですが)

$\frac{n^2}{3}$ くらい?

$\frac{n^2}{3}$ であることをもう少しわかりやすくするために、詳しく見ていきましょう。

1辺の長さ(n)	1	2	3	4	5	6	7
面積(n^2)	1	4	9	16	25	36	49
$n^2/3$	0.3	1.3	3	5.3	8.3	12	16.3
空きマスの数 H の最大値 (予想)	1	0	3	4	7	12	15
長方形の数 D の最小値 (予想)	0	2	3	6	9	12	17
$2D+H$ の値	1	4	9	16	25	36	49

以降は穴の数を H 、長方形の数を D とします。

面積の合計が n^2 になるので、 $2D + H = n^2$ です。
したがって穴の数 H と n の偶奇は一致します。このことを念頭に置いて観察すると、

1 辺の長さ(n)	1	2	3	4	5	6	7
$n^2/3$	0.3	1.3	3	5.3	8.3	12	16.3
H の最大値 (予想)	1	0	3	4	7	12	15

$n \geq 2$ のとき、

(性質 1) H と n の偶奇は一致

(性質 2) $H \leq \frac{n^2}{3}$

であることが予想できます。この予想が正しければ、 $n=2,3,4,5,6,7$ のとき H は 0,3,4,7,12,15 を超えることはできず、(1)(2)の答え

穴の数は 6×6 で 12 個、 7×7 で 15 個が最大

が得られました¹²。

さて、では答えを完璧なものにするため、性質 2 を証明してみましょう。(ここから先はかなり複雑なので読み飛ばして良いです。) $2D + H = n^2$ ですから、 $H \leq D$ であることが証明できれば

$$3H \leq 2D + H = n^2$$

となり、性質 2 が言えます。したがって以降は

(性質 2') $H \leq D$

を示すこととなります³。

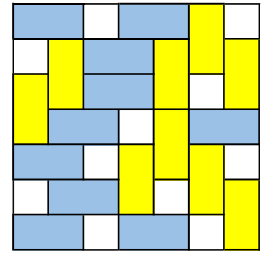
¹ 当然ですが、実際に 12 個や 15 個になる敷き詰め方があることを示さなければいけません。

² 他の n についても、「性質 1 と性質 2 を満たす中で最大の数」が答えになるような気がしますが、これは誤りで、十分に大きい n に対しては n が 3 の倍数でないとき $H < \frac{n^2}{3} - \frac{2n}{111}$ であることが証明されています。(参考文献[1])

³ 性質 2 と性質 2' は同値です。

以下の証明方法は、参考文献[1]によるものです。右の具体例を見ながら説明します。

敷き詰められた長方形は、下に書いた図の2通りの方法で3つに分類できます。



このとき、
$$\begin{cases} D = D_{top} + W_{top} + D' & \dots ① \\ D = D_{bot} + W_{bot} + D'' & \dots ② \end{cases}$$
 が成り立ちます。

分類 ①

D_{top} 長方形の上辺が
枠の上辺に接する

W_{top} 長方形の上辺すべてが
他の長方形に接する

D' D_{top} でも W_{top} でもない
(上辺に穴がある)

分類 ②

D_{bot} 長方形の下辺が
枠の上辺に接する

W_{bot} 長方形の下辺すべてが
他の長方形に接する

D'' D_{bot} でも W_{bot} でもない
(下辺に穴がある)

また、敷き詰めたときの穴も右のように2通りに分解できます。

このとき、
$$\begin{cases} H = H_{top} + H' & \dots ③ \\ H = H_{bot} + H'' & \dots ④ \end{cases}$$
 が成り立ちます。

分類 ①

H_{top} 枠の上辺の穴

H' H_{top} でない穴

分類 ②

H_{bot} 枠の下辺の穴

H'' H_{top} でない穴

さらに観察すると
$$\begin{cases} D' = H'' & \dots ⑤ \\ D'' = H' & \dots ⑥ \end{cases}$$
 であることが

わかります。ここから D と H の関係を見ましょう。

⑤⑥から $D' + D'' - H' - H'' = 0$ なので、①②③④をすべて組み合わせて

$$\begin{aligned} D + D - H - H &= (D_{top} + W_{top} + D') + (D_{bot} + W_{bot} + D'') - (H_{top} + H') - (H_{bot} + H'') \\ &= W_{top} + W_{bot} - (H_{top} - D_{top}) - (H_{bot} - D_{bot}) \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

ここで $H_{top} - D_{top}$ に注目します。 H_{top} は枠の上辺にある穴の数、 D_{top} は枠の上辺にある長方形の数なので、

$$H_{top} \leq D_{top} + 1$$

が成立します。穴が2つ以上連続しないので、(上辺に穴と長方形が交互に来たとしても) 穴の数は「長方形の数+1」を超えられません。

同様に $H_{bot} \leq D_{bot} + 1$ も成り立つので、⑦から

$$\begin{aligned} D + D - H - H &\geq W_{top} + W_{bot} - 1 - 1 \\ D - H &\geq \frac{W_{top} + W_{bot}}{2} - 1 \quad \dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

が成り立ちます。(等号成立は $H_{top} = D_{top} + 1$ かつ $H_{bot} = D_{bot} + 1$ のとき)

以降は、背理法を使います。 $D < H$ であると仮定すると、 D と H は整数なので⑧から $D - H = -1$ です。

n が3の倍数のとき、 $2D + H = n^2$ と $D - H = -1$ から $3D = n^2 - 1$ となりますが、左辺が3の倍数であるのに対して右辺は3の倍数ではないので矛盾です。よって n が3の倍数でないときを考えます。

n が3の倍数ではないとき、⑧と $D - H = -1$ から $W_{top} = W_{bot} = 0$ が必要になります。さらに⑧の等号が成立しているので、等号成立の条件から $H_{top} = D_{top} + 1$ かつ $H_{bot} = D_{bot} + 1$ です。

また、先ほどの話(式①~⑧)は枠の上辺と下辺を用いて上下の位置関係で議論しましたが、これを左右の位置関係に取り替えても全く同じです。したがって先ほどと同じように D_{left} , D_{right} , W_{left} , W_{right} , H_{left} , H_{right} を定義したら、 $D < H$ のとき

$$W_{top} = W_{bot} = W_{left} = W_{right} = 0 \quad \dots \textcircled{9}$$

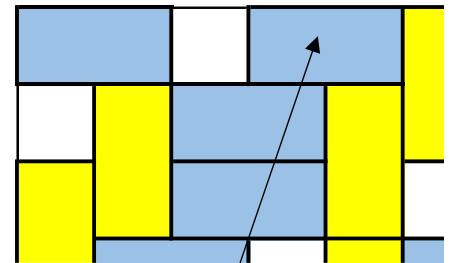
$$\begin{cases} H_{top} = D_{top} + 1 \\ H_{bot} = D_{bot} + 1 \\ H_{left} = D_{left} + 1 \\ H_{right} = D_{right} + 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{10}$$

が成り立つはずですが、⑨は、

「全ての長方形のすべての辺が、枠の外部または穴に接する」

...(A)

ことを意味しています。



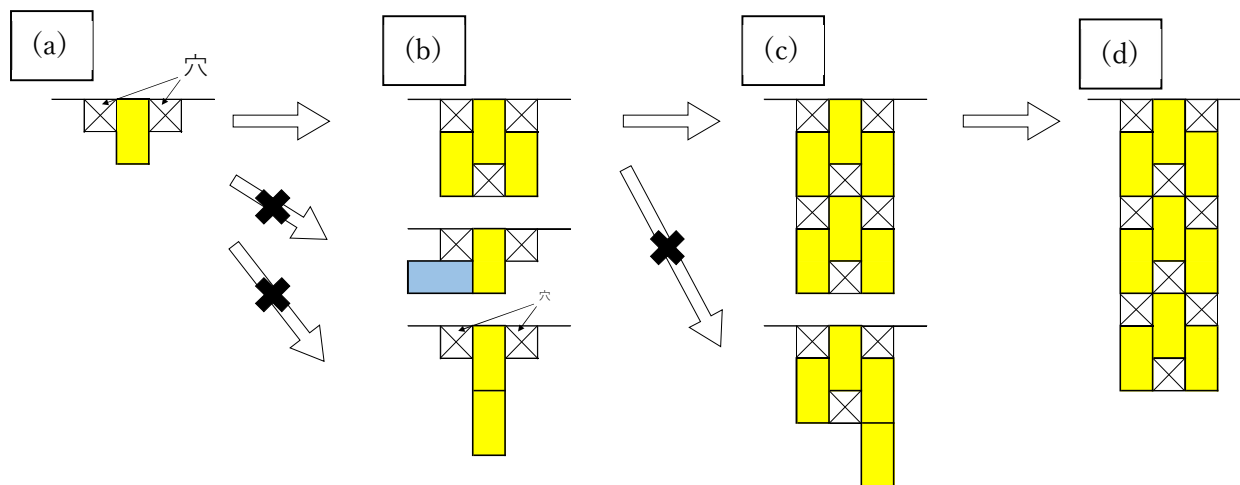
たとえばこの長方形は、右の辺と下の辺が穴にも外枠にも接していないので $W_{right} \neq 0$, $W_{bot} \neq 0$ だから⑨が満たされない。
このような長方形が1つも存在しないことが、⑨および $D < H$ の必要条件である。

さらに⑩は

「外枠のすべての辺は、長方形と穴が交互に現れる」 …(B)

「外枠の四隅はいずれも穴」 …(C)

を意味します。



最後の証明のパーツは、(A)(B)(C)が満たされるなら枠の上辺には横向きの長方形のみが並ぶことです。

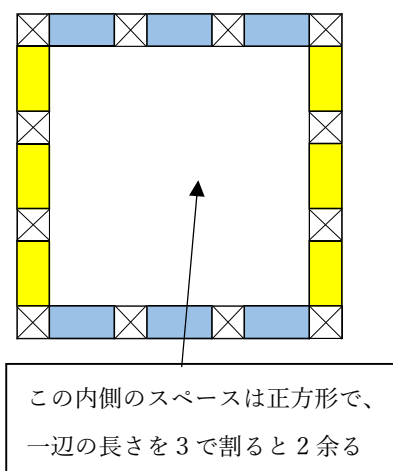
枠の上辺に縦向きの長方形があると仮定すると、(B)(C)からその長方形は左右を上辺の穴に挟まれているはずですが(上図の(a))。すると(A)を満たしながら長方形を敷き詰めるためには、上図の(b)→(c)→(d)→…と縦向きの長方形をならべていくしかありません。

並べていくうちに枠の下辺にぶつかりますが、ちょうど下辺にぶつかるためには n が 3 の倍数である必要があります、矛盾します。

よって、枠の上辺の長方形はすべて横向きであることが言えました。これは上辺以外にも、左、右、下の辺についても全く同じです。つまり「外枠の長方形は、枠と同じ向き」…(D) であることが証明できました。

最後です。(B)(C)(D)がすべて成り立つためには枠の周囲が右図のようになるはずですが、 n が 3 で割って 2 余る数のときこれは不可能です。

n が 3 で割って 1 余る数のときは、外周を埋めることはできても内部に新しい正方形ができてしまいます。外周には長方形と穴が同じ個数あるので、この新しい正方形を敷き詰めて $D < H$ を達成しなければならず、これは(新しい正方形の一辺の長さを 3 で割ると 2 余るので)不可能です。



以上から背理法により $H \leq D$ で、(1)(2)の空きマスが「12個」と「15個」であることがようやく証明できました。

厳密に証明しようとするとても複雑な問題でしたが、最大数が $\frac{n^2}{3}$ くらいであることを突き止めることができれば満点扱いでよいと思います。考えてくれた方、お疲れ様でした。

参考文献[1] A. Gyárfás, J. Lehel, and Zs. Tuza, Clumsy packing of dominoes, Discrete Mathematics, Volume 71, Issue 1 (1988), 33-46.

[2] オンライン整数列大辞典 A280984