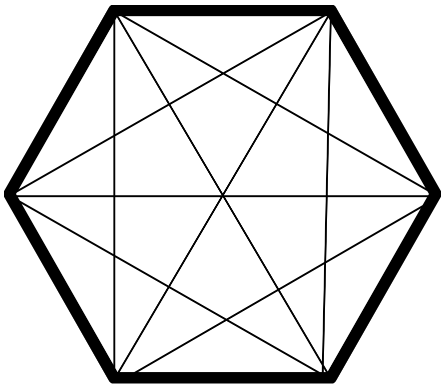
先月の解答・解説

2018 年 12 月の問題



図は正 6 角形とその対角線です。

正 6 角形には対角線が 9 本あり、これによって 24 個に分割されます。

(1) 正 12 角形の対角線の本数を求めてください。

(辺は対角線に含みません)

(2) 正 12 角形は、対角線によっていくつに分割されますか。

(3) 【チャレンジ問題】

正 29 角形ではどうですか。

※正 29 角形の対角線は、3 本が同時に交わることはありません。これを用いてもよいです。

解説

今回は比較的多くの人が解答を寄せてくれました。とくに中学生の正解が出て驚いています。今年のジュニア日本数学オリンピックにも出るそうなので、この調子で頑張ってほしいと感じます。

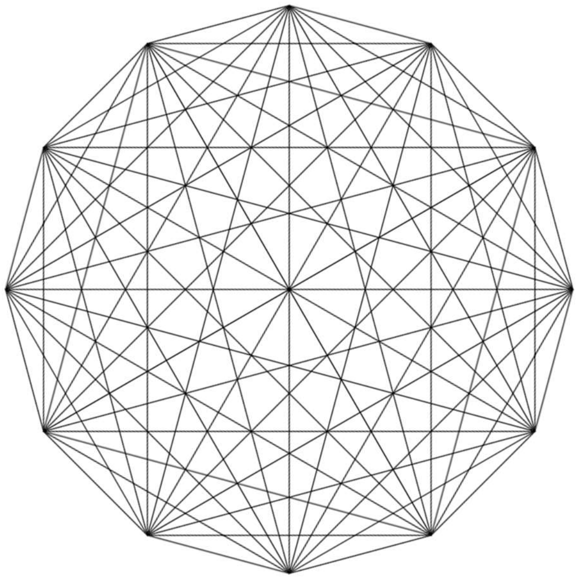
さて、正 12 角形の対角線をすべて書くと、右のようになります。このくらいなら、実際に数えた方が速いかもしれません。

数えてみると

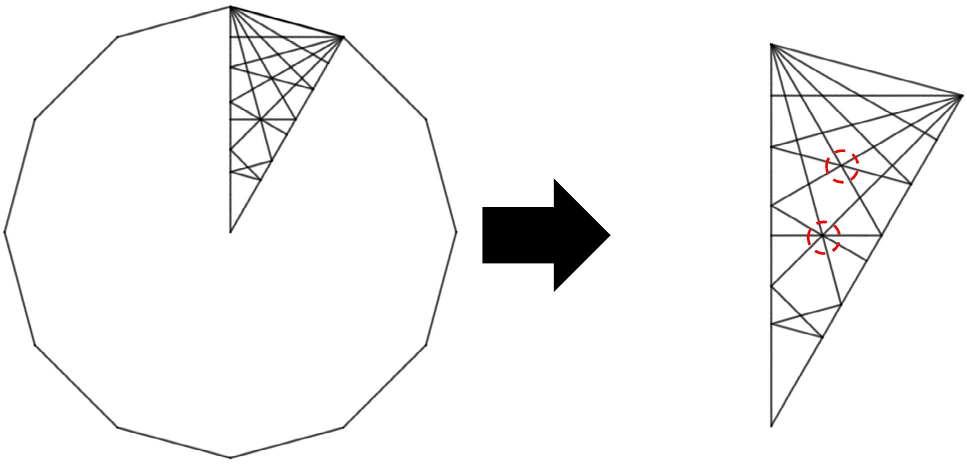
(1)　54 本

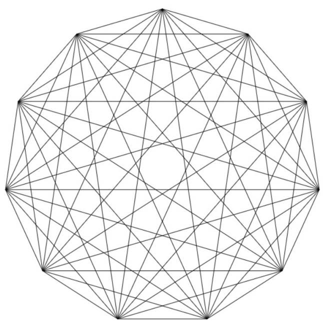
(2)　444 個

であることがわかるでしょう。



ちなみに偶数角形は、領域の数を数えるときに小さいパーツにわけて考えることができます。今回はこの部分が 37 個に分割されているので、37×12=444 個であることがわかります。





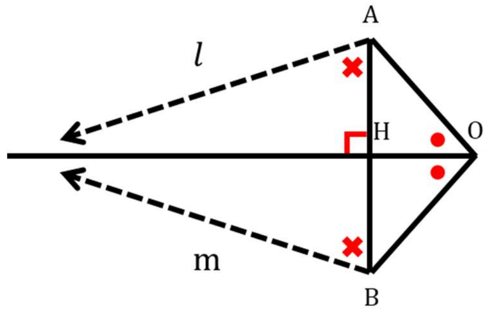
奇数角形では不可能（これは 11 角形）

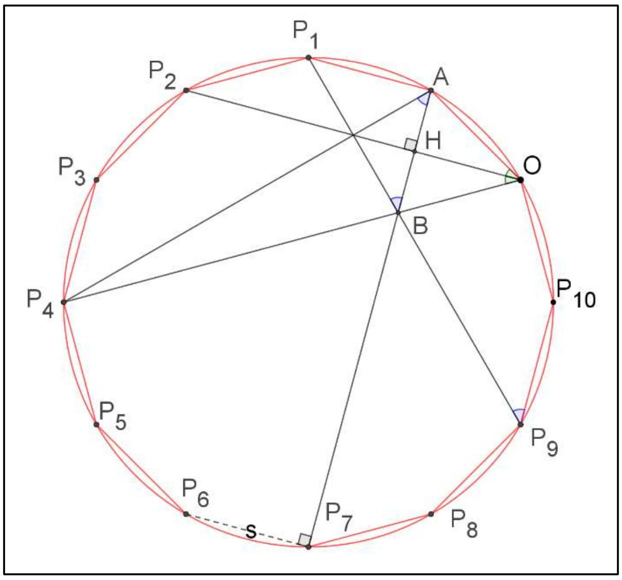
気になるのは、３本や４本の対角線が同時に交わっているところです。(前ページの○で囲んだ部分)

視覚的には同時に交わっているように見えますが、本当に交わっているのか気になりますよね。どうやって示せばよいでしょう？

これは、こうやって示してみることにします。(参考文献[1]の方法を用いています)

図の点 O,A,B について、直線 OH が AB と垂直に交わることにします。このとき、図の角度が等しければ、点線の矢印で書いた直線 l と m は直線ＯＨ上で交わりますね。





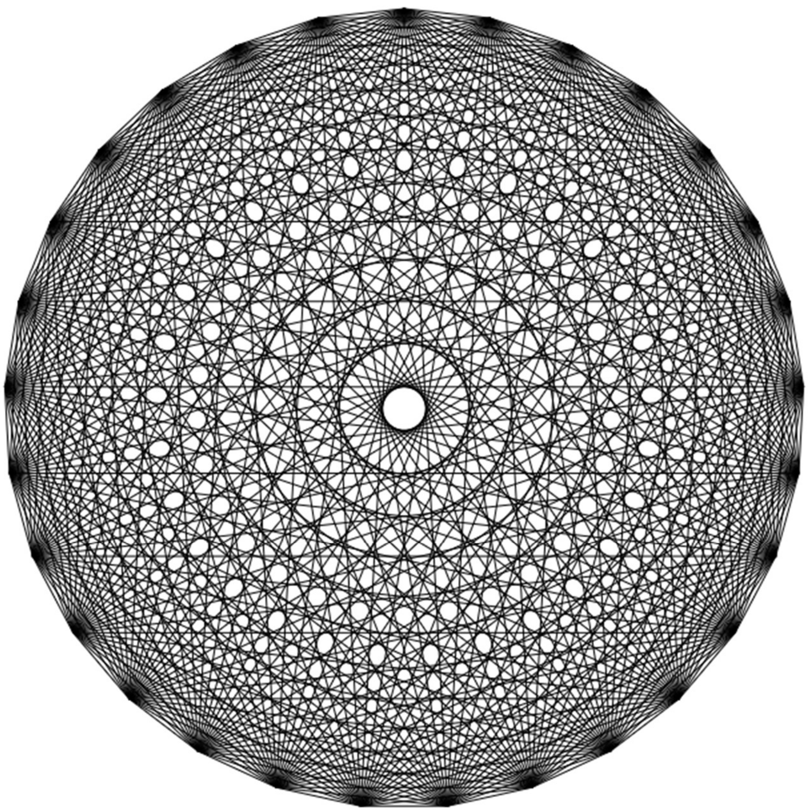
すると、正 12 角形の外接円をかけば、円周角の定理から

- $\angle \mathrm{AOH} = \angle \mathrm{AOP_2} = \angle \mathrm{P_4OP_2} = \angle \mathrm{BOH}$
- $\mathrm{AP_7}$ と $\mathrm{P_6P_7}$ は垂直なので $\mathrm{OH} \perp \mathrm{AB}$
- $\angle \mathrm{P_4AP_7} = \angle \mathrm{P_1P_9P_{10}} = \angle \mathrm{P_1BA}$

となり条件を満たします。したがって $\mathrm{AP_4}, \mathrm{OP_2}, \mathrm{P_9P_1}$ の 3 本の直線は 1 点で交わることが示されました。

もうひとつ、4 本の対角線が交わっているところがあるのですが、これも同様の手法で示すことができます。

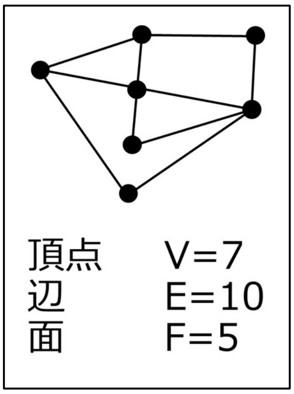
(3) 最後に、正 29 角形の場合です。



まずは対角線の数を考えます。頂点を２つ選ぶと、選んだ頂点を結ぶ線分を考えることができます。これは辺か対角線のどちらかになるから、求める本数は ${}_{29}\mathrm{C}_2 - 29 = 377$（本）となります。

領域の数は、正 12 角形のときのように人力で数えるのは不可能そうですね。ここでは平面グラフに関するオイラーの定理

$$\mathrm{V} - \mathrm{E} + \mathrm{F} = 2$$



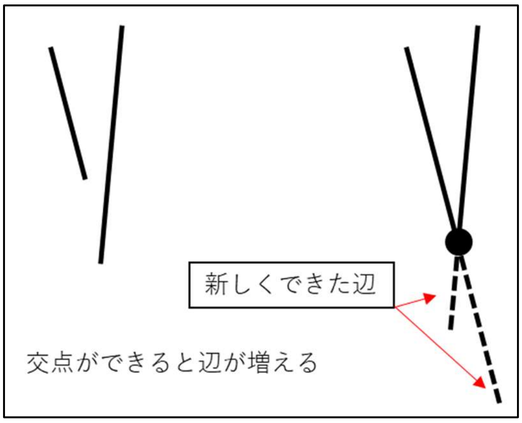
を用います。グラフとは、右のように頂点・辺・面からできているもののことで、頂点以外で辺が交差していないとき、これを平面グラフといいます。

右の図では頂点は７つ、辺は 10 本で、面（領域数）は外領域も数えるので５です。これは多面体においても成り立ち、数学 A の教科書に「オイラーの多面体定理」として載っています。

さて、正 29 角形に対角線をすべて引いた図形を考えます。

この図形の頂点は、もとの正 29 角形の頂点に加えて対角線の交点が含まれています。この数は 29 個の頂点から４個の頂点を選ぶ方法の数に等しい[1]ので、${}_{29}\mathrm{C}_4$です。よって$\mathrm{V} = {}_{29}\mathrm{C}_4 + 29$となります。

辺の数のほうは、内部の交点を考えなければ先ほどのように ${}_{29}\mathrm{C}_2$（本）です。



内部の交点１つにつきグラフの「辺」が２つ増える（右図）ので、$\mathrm{E} = {}_{29}\mathrm{C}_2 + 2{}_{29}\mathrm{C}_4$であることが言えました。

したがって、オイラーの定理から

$$\mathrm{F} = 2 + \mathrm{E} - \mathrm{V} = 2 + {}_{29}\mathrm{C}_4 + {}_{29}\mathrm{C}_2 - 29 = 24130$$

です。これは外側の領域も含むので、１を引いて 24129 個の領域に分かれることが言えました。

ところで、正 12 角形で同じことをやろうとしても$1 + {}_{12}\mathrm{C}_4 + {}_{12}\mathrm{C}_2 - 12 = 550$で数が合いません。これは正 12 角形の場合は３本以上の対角線が内部で交わっているからで、ここを考慮[2]しなければいけません。

参考文献[2]によれば、n が奇数のとき正 n 角形の対角線が内部で３本以上同時に交わることはありません。この文献では n が偶数の時の対角線の交点の数や領域の数も完全に解決しており、表７に今回の答え R(12)=444, P(29)=24129 が載っています。Web で読めますので興味があれば調べてください。

参考文献

[1]　友田勝久　正 18 角形の対角線の交点について(2006)
https://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/diagonal18.pdf

[2]　Poonen B., Rubinstein M.: The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon. SIAM J. Discrete Math. 11(1), 135–156 (1998)

---

[1] 頂点を４つ選ぶと、その４つを用いた対角線の交点が１つ作れる。数学 A の「順列・組み合わせ」の分野でよくある問題。

[2] ３本交わる交点１つごとに１個の領域を減らす。４本の交点では３個、６本の交点では 10 個の領域を減らす。