

洛北算額 今月の問題 2022.3

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ について、 $f(g(x))$ という関数を考えることがあります。
たとえば $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x^2 + 4x + 5$ の場合は

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \{g(x)\}^2 + 2g(x) + 3 \\ &= (x^2 + 4x + 5)^2 + 2(x^2 + 4x + 5) + 3 \\ &= x^4 + 8x + 28x + 48x + 38 \end{aligned}$$

です。次の問いに答えてください。

(1)

2つの2次関数 $f(x)$ と $g(x)$ をうまく選んで、

方程式 $f(g(x)) = 0$ の解が $x = 1, 2, 3, 4$ となるようにしてください。

(2)

3つの2次関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ をどのように選んでも、

方程式 $f(g(h(x))) = 0$ の解は $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ にはならないことを証明してください。

(3)

3つの2次関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ をうまく選んで、

方程式 $f(g(h(x))) = 0$ が8つの異なる自然数解を持ち、その和が最小になるようにしてください。

解答は t-fujioka-15@kyoto-be.ne.jp (藤岡)まで送ってください。

洛北高校、附属中学校の人は直接職員室まで。

途中の考え方を書いてくれると、コメント等をお返しできます。