

洛北算額 今月の問題 2021.2

$n \times n$ マスの部屋に、 1×2 または 2×1 の長方形を配置します。

$n=4$ のとき、図1のように配置すると 1×1 の空きマスが4つできます。

$n=5$ のとき、図2のように配置すると 1×1 の空きマスが7つできます。

- (1) 空きマスができるだけ多くなるように配置するとき、 6×6 ではいくつの空きマスができますか。
- (2) 7×7 ではどうですか。

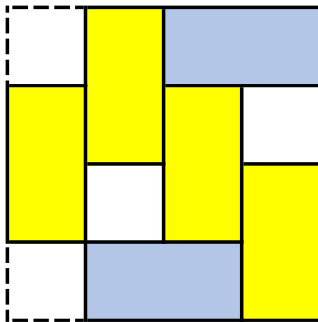


図 1

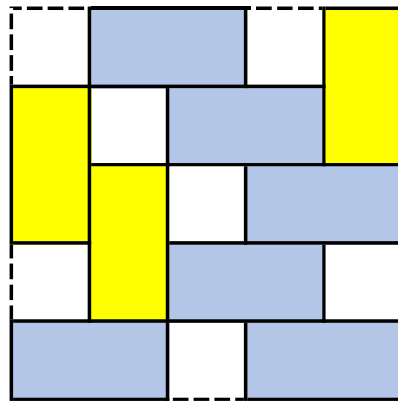


図 2

解答は t-fujioka-15@kyoto-be.ne.jp (藤岡)まで送ってください。

洛北高校、附属中学校の人は直接職員室まで。

途中の考え方を書いてくれると、コメント等をお返しできます。

先月の解答・解説

2020年12月の問題

1201 を 2 乗すると 1442401 で、

「1」 「2」 「0」 「1」 が順番通りに現れます。

371 を 2 乗すると 137641 で、

「3」 「7」 「1」 が順番通りに現れます。

(1) このような条件を満たす自然数を、ほかにも見つけてください。

(2) 101, 1001, 10001, ... は全てこの条件を満たすので、

この条件を満たす自然数は無数に存在します。

このような、条件を満たす数をいくらでも見つけられる数列を

他にも見つけてください。

解説

かなり自由度の高い問題にしてみました。

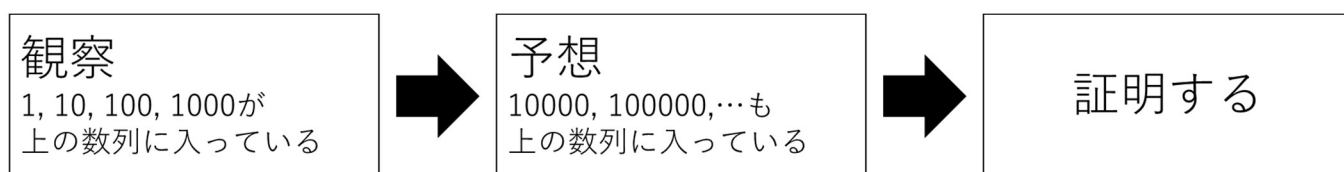
洛北高校では2020年12月に「洛北数学探究チャレンジ」というイベントが行われ、数学の探究活動を行いました。自分でテーマを決めて探究活動をするとき、このような自由度の高い問題が足掛かりになることが多いです。例えば1201までの数で条件を満たすのは

1, 5, 6, 10, 11, 25, 50, 60, 76, 95, 96, 100, 101, 105, 110, 125, 205, 250, 305, 371, 376, 405, 441, 500, 501, 505, 506, 525, 600, 601, 605, 625, 676, 705, 756, 760, 805, 825, 826, 905, 946, 950, 960, 976, 995, 996, 1000, 1001, 1005, 1006, 1010, 1011, 1021, 1025, 1026, 1036, 1046, 1050, 1100, 1101, 1105, 1201

の62個となり¹（これが(1)の答えになります）、このままだとかなり煩雑としています。

ここから数学的になにかを得ようとするなら、いくつかを取り出して考えるといいでしょう。

例えば「1, 10, 100, 1000」の4つが上の数列に含まれているので、次のような手順で考察することができます。これはとても簡単な例なので、証明も一瞬ですね。



では、他の場合を見つけてみましょう。たとえば、こんな部分列を取り出すことができます。

| | 観察 | | 予想 |
|---|------------------|---|-----------------------------|
| ① | 5, 50, 500 | → | 5000, 50000, 500000, ... |
| ② | 6, 60, 600 | → | 6000, 60000, 600000, ... |
| ③ | 1, 11, 101, 1001 | → | 10001, 100001, 1000001, ... |
| ④ | 5, 25, 525 | → | 2525, 52525, 252525, ... |
| ⑤ | 25, 125, 1025 | → | 10025, 100025, 1000025, ... |
| ⑥ | 5, 95, 995 | → | 9995, 99995, 999995, ... |
| ⑦ | 6, 96, 996 | → | 9996, 99996, 999996, ... |

①や②は先ほどの「1, 10, 100, 1000」の例と全く同じように証明できます。他も、実際に2乗するとパターンが見えてきます。たとえば

$$2525^2 = 6375625$$

$$1000025^2 = 1000050000625$$

$$99995^2 = 9999000025$$

などです。④は成り立ちませんが、他の予想についてはすべて当たっていることがわかりました。

¹ オンライン整数列大辞典の A052212

①②③⑤は0を増やすだけなので、ある意味当たり前ですね。⑥⑦は少し高度な話という気がします。もっと高度な話ができないでしょうか？

たとえば、1001 や 1101、1011 など1と0で作られる数字はどうでしょう。これを上手く使えばもう少し複雑な数を考えられそうです。

いろいろ調べてみると、こんな結果が出ました。

0と1のみで作る数字を2乗したとき、不規則に並べたほうが1が出てきやすい。

$$\begin{array}{r}
 10001011 \\
 \times 10001011 \\
 \hline
 10001011 \\
 10001011 \\
 10001011 \\
 10001011 \\
 10001011 \\
 \hline
 100020221022121
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1010101 \\
 \times 1010101 \\
 \hline
 1010101 \\
 1010101 \\
 1010101 \\
 1010101 \\
 1010101 \\
 \hline
 1020304030201
 \end{array}$$

0と1をバラバラに並べた数：

桁がバラバラなので2乗すると1が多い

0と1を規則的に並べた数：

桁が揃うので2乗すると1が少ない

これを使えば、たとえば

1, 11, 1011, 10001011, 1000000010001011, 10000000000000001000000010001011, ...

のような数列を作れます (n 番目の数は、 $1 + 10 + 10^3 + 10^7 + \dots + 10^{2^{n-1}-1}$)。

他にも、洛北算額の2020年7月の問題に出てくる数列

5, 25, 625, 0625, 90625, 890625, 2890625, ...

6, 76, 376, 9376, 09376, 109376, 7109376, ...

は条件を満たします。実際に二乗してみると、

$$7109376^2 = 50543227109376$$

のように末尾に同じ数列が表れるからです。

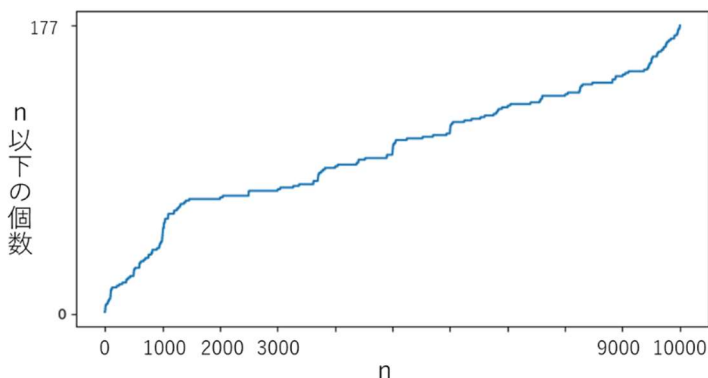
今回のようなアバウトなテーマから、いろいろな探究活動をすることができます。

他の場合について、ぜひいろいろ調べてみてください。

さて、コンピュータを用いてこの問題について調べてみます。コンピュータを使って計算するとき、最初に興味がわくのは「このような数がどのくらいの頻度で現れるか？」です。

10000 以下の n について、「 n 以下で条件を満たす数の個数」を調べてグラフにすると、右のようになりました。

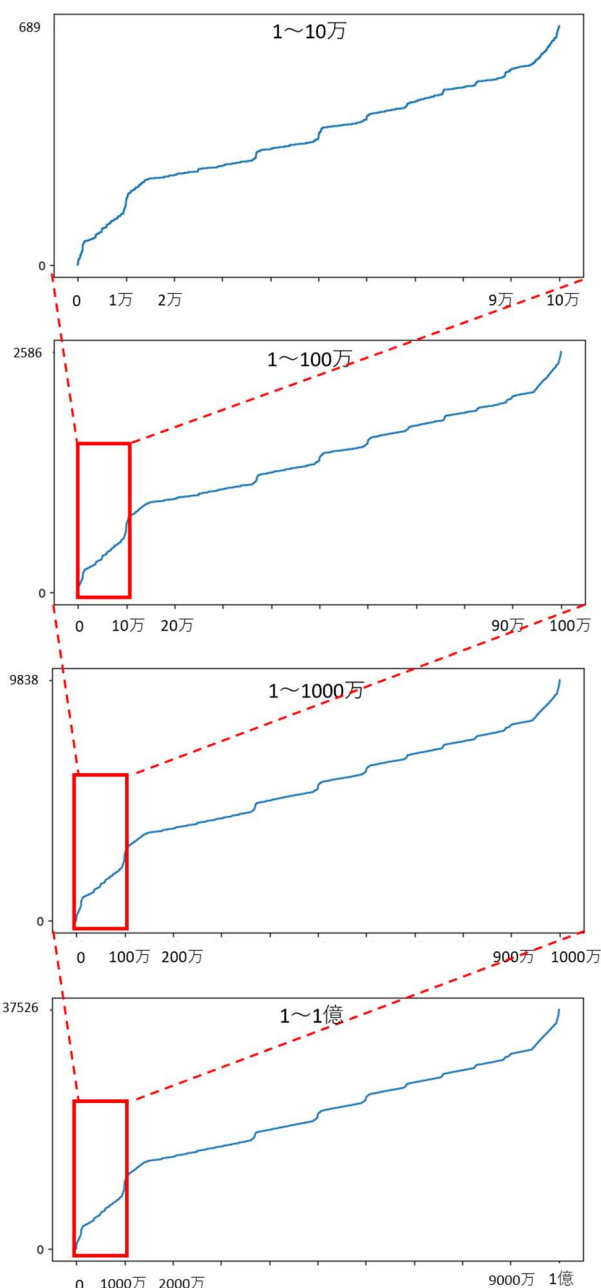
このグラフから、 n が 1 から 1000 までの範囲では算額数がたくさんあることや、2000 から 3000 までにはあまり無いことが見えてきます。9000 から 10000 までの範囲にもけっこうありますね。



さらに、 n が 10 万以下、100 万以下、… で調べてみます。すると面白い事が見えてきました。図のように、10 倍したときにほぼ同じ形のグラフが表れるのです。

つまりこのグラフが自己相似の構造（自分自身的一部分と相似である構造）を持っていると言えます。

とても不思議ですよね。理由は見当がつく²のですが、厳密な証明はできませんでした。この問題には個人的にじっくり取り組もうと思います。



² そもそも 10 進法というのが自己相似の構造を持っており、それが効いているはずですが。