先月の解答・解説

2020 年 6 月の問題

$n!$ が 3 で割り切れる回数をa_n ， $n!$ が 4 で割り切れる回数をb_n とします。

たとえば 10!=3628800 は 3 で 4 回、4 で 4 回割り切れるので $a_{10}=4, b_{10}=4$です。

3で割る： 3628800 → 1209600 → 403200 → 134400 → 44800 → ×（割り切れない）
4回割り切れたので$a_{10}=4$

4で割る： 3628800 → 907200 → 226800 → 56700 → 14175 → ×（割り切れない）
4回割り切れたので$b_{10}=4$

(1)　22!が 3 で割り切れる回数 a_{22}と 4 で割り切れる回数 b_{22}を求めなさい。

(2)　10000!が 3 で割り切れる回数 a_{10000}と 4 で割り切れる回数 b_{10000}を求めなさい。

(3)　(1)(2)から、a_nとb_nはだいたい一致することが予想されます。

a_nとb_nが近い値になる理由を数学的に考察してください。

解説

この性質に気が付いたときはうれしかったです。まずは計算してみましょう。

(1)　22!=1×2×3×4×5×6×7×8×9×10×11×12×13×14×15×16×17×18×19×20×21×22

$=2^{19}\times 3^{9}\times 5^{4}\times 7^{3}\times 11^{2}\times 13\times 17\times 19$

なので、3 で 9 回、4 で 9 回割り切れます。$a_{22}=9,\ b_{22}=9$です。

(2)　同様に 10000!に含まれる 2 の数と 3 の数を考えたいのですが、10000 は大きいので(1)のようにすべてを計算するのは難しいでしょう。

これは数学 A によくある問題で、10000!に含まれる素因数 2 の個数は

(2 の倍数の個数)+(4 の倍数の個数)+(8 の倍数の個数)+(16 の倍数の個数)+⋯

$=5000+2500+1250+625+312+156+78+39+19+9+4+2+1$

$=9995$

で計算できます。10000 を 2 で割って 5000、5000 を 2 で割って 2500、2500 を 2 で割って 1250、⋯と計算していくのですね。同様に素因数 3 の個数は

(3 の倍数の個数)+(9 の倍数の個数)+(27 の倍数の個数)+(81 の倍数の個数)+⋯

$=3333+1111+370+123+41+13+4+1$

$=4996$

です。(詳しくは数学 A の教科書を見るか、数学の先生に質問してください。)

ここから、3 で割れる回数は 4996 なので　$a_{10000}=4996$

4 で割れる回数は$\left[\frac{9995}{2}\right]=4997$なので　$b_{10000}=4997$

であるとわかりました。

(3)　n=10000 のときも、4996 と 4997 でだいたい一致しました。いろいろ表にしてみましょう。

n	10	22	100	10000	59049	100000000	123456789
$n/2$(切り捨て)	5	11	50	5000	29524	50000000	61728394
a_n	4	9	48	4997	29520	49999994	61728384
b_n	4	9	48	4996	29524	49999990	61728386

どうやら、a_n と b_n はどちらも $\frac{n}{2}$ より少し小さい値になっているようです。

理由を考えてみましょう。示すべきことは次の内容ですね。

$n!$に含まれる素因数３の数を$A(n)$、素因数２の数を$B(n)$としたとき $A(n) \fallingdotseq 2 \times B(n)$

$a_n = A(n)$，$b_n = \frac{1}{2}B(n)$（切り捨て）　です（４で割れる回数は、素因数２の個数の半分）。したがって$A(n) \fallingdotseq \frac{1}{2}n$，$B(n) \fallingdotseq n$を示せばよさそうですね。そして実際、ガウス記号[1]を用いれば

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{3^2}\right] + \left[\frac{n}{3^3}\right] + \left[\frac{n}{3^4}\right] + \cdots \\
&\fallingdotseq \frac{n}{3} + \frac{n}{3^2} + \frac{n}{3^3} + \frac{n}{3^4} + \cdots \qquad \text{※ 1} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(n) &= \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \left[\frac{n}{2^4}\right] + \cdots \\
&\fallingdotseq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} + \frac{n}{2^4} + \cdots \qquad \text{※ 2} \\
&= n
\end{aligned}
$$

となり、目的のものがほぼ得られました。
最後に※１や※２でどの程度の誤差が生じるかですが、前ページで割り算を行うときの回数を用いて

「割り算の回数を k 回としたとき、　誤差は k 以下」

であることが示せます(つまり$A(n)$と $\frac{n}{2}$ の誤差は $\log_3 n$ 未満、$B(n)$とnの誤差は $\log_2 n$ 未満)。なぜでしょう。

1 $[x]$で、xを超えない最大の整数を表す。

例えば$n = 10000$で先ほどの計算をしてみると

$$A(n) = \left[\frac{10000}{3}\right] + \left[\frac{10000}{3^2}\right] + \left[\frac{10000}{3^3}\right] + \left[\frac{10000}{3^4}\right] + \left[\frac{10000}{3^5}\right] + \left[\frac{10000}{3^6}\right] + \left[\frac{10000}{3^7}\right] + \left[\frac{10000}{3^8}\right] + \left[\frac{10000}{3^9}\right] + \left[\frac{10000}{3^{10}}\right] + \left[\frac{10000}{3^{11}}\right] + \cdots$$

$$= \underbrace{3333 + 1111 + 370 + 123 + 41 + 14 + 4 + 1 + 0}_{①} \underbrace{+0 + 0 + \cdots}_{②}$$

となります。

①の部分（1 個目の 0 まで）の長さは、10000 を 3 で割り続けて 0 になるまでの回数（つまり k 回）です。

②の部分は無限に続きますが、ガウス記号の中身は 1/3 未満、1/9 未満、1/27 未満…と徐々に小さくなっていくので無限等比級数（数学 III）の考え方を用いて

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{2}$$

より誤差が小さいことがわかります。よって※1 の誤差は$k + \frac{1}{2}$未満であることがわかりました。実際には①の部分の誤差もkではなく$k - \frac{1}{2}$未満であることが示せるので、さきほどの主張が証明できます。

同様に B(n)についても考えていくと、

$$\frac{n}{2} - \log_3 n < a_n < \frac{n}{2}$$

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\log_2 n < b_n < \frac{n}{2}$$

が示せます。 $\log_3 n$ や $\frac{1}{2}\log_2 n$ は $\frac{n}{2}$ に比べて非常に小さいので、a_nとb_nが「ほとんど」一致します。

実際、たとえば$n = 2^{1000}$などの大きい数で試してみると

a_n =5357543035931336604742125245300009052807024058527668037218751941851755255624680612465991894078479290637973364587765734125935726428461570217992288787349287401967283887412115492710537302531185570938977091076523237491790970633699383779582771973038531457285598238843271083830214915826312193418602834034$\underline{367}$

b_n =5357543035931336604742125245300009052807024058527668037218751941851755255624680612465991894078479290637973364587765734125935726428461570217992288787349287401967283887412115492710537302531185570938977091076523237491790970633699383779582771973038531457285598238843271083830214915826312193418602834034$\underline{687}$

となり、わずかに下 3 桁がズレるのみです（$n = 2^{1000}$のとき$\log_2 n = 1000$だから誤差は 1000 以下、つまり 3 桁しかズレない）。面白いですね。